

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**  
Departamento de Termología



TESIS DOCTORAL

**Estudio de correlaciones en el flujo turbulento de un fluido  
neutro en un canal infinito de lados paralelos, mediante una  
teoría estadística**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
PRESENTADA POR

**María José Ortiz Beviá**

DIRECTOR:

**José Aguilar Peris**

Madrid, 2015

TP  
1980  
151

María José Ortiz Beviá



X-53-074660-9

ESTUDIO DE CORRELACIONES EN EL FLUJO TURBULENTO DE UN FLUIDO  
NEUTRO EN UN CANAL INFINITO DE LADOS PARALELOS, MEDIANTE  
UNA TEORIA ESTADISTICA

Departamento de Termología  
Facultad de Ciencias Físicas  
Universidad Complutense de Madrid  
1980



BIBLIOTECA

© María José Ortiz Bevia  
Edita e imprime la Editorial de la Universidad  
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía  
Noviciado, 3 Madrid-8  
Madrid, 1980  
Xerox 9200 XB 480  
Depósito Legal: M-38568-1980

Autor:MARIA JOSÉ ORTIZ BEVIÁ

ESTUDIO DE CORRELACIONES EN EL FLUJO TURBULENTO  
DE UN FLUIDO NEUTRO EN UN CANAL INFINITO DE LADOS  
PARALELOS, MEDIANTE UNA TEORÍA ESTADÍSTICA

Director:Dr.D.JOSÉ AGUILAR PERIS

Director del Departamento de Termología

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Físicas

Departamento de Termología

Madrid 1980

## AGRADECIMIENTO

El presente trabajo se ha llevado a cabo bajo la dirección del Profesor D. José Aguilar Peris en el Departamento de Termología de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense. Le agradecemos aquí su constante ayuda en la realización de estos estudios y las facilidades dadas para llevarlos a cabo.

El problema objeto de esta memoria fué planteado por el Prof. D. C. Lesl del Queen Mary College, Londres. Hacemos constar la deuda contraída por acogida de que fuimos objeto y por su amabilidad al discutir con nosotros el enfoque del trabajo y al poner a nuestra disposición informes privados e incluso cuadernos de notas personales.

Parte de este trabajo se realizó en el Forschungsanstalt der Bundeswehr fuer Wasserschall- und Geophysik de Kiel, Alemania Federal, con el consejo y ayuda del Dr. J. Piest, y la última parte siendo la autora profesor ayudante en el Departamento de Física de la Universidad de Alcalá. En ambos casos queremos agradecer las facilidades que se nos han dado.

Agradecemos al Dr. Ruiz de Elvira la ayuda prestada a la hora de realizar los cálculos con ordenador, y a José Manuel Cardero el esmero en la delineación de las figuras.

Madrid, Mayo 1980

## INTRODUCCION

Por experiencia diaria sabemos de la existencia de dos tipos de flujo. Si observamos la corriente de un río, unas veces veremos que los objetos que arrastra en su superficie (ramas, hojas, etc) se mantienen siempre a la misma distancia entre si y de las orillas. Otras veces en la superficie aparecen vórtices que arrastran, entremezclándolos, a todos estos objetos. El primer tipo de flujo, que da una impresión de regularidad, se conoce como flujo laminar; el segundo, que da una impresión de irregularidad y desorden es conocido como turbulento.

El primer científico que estudió la turbulencia fué O. Reynolds (1883)(1). Encontró una forma de expresar esta diferencia caracterizando el flujo turbulento, frente al laminar, por una distorsión en la reflexión de la luz en la superficie libre del fluido y un aumento notable de la resistencia a fluir a través de tubos. Mientras que en el régimen laminar la resistencia es proporcional a la velocidad, en régimen turbulento es aproximadamente proporcional a su cuadrado. Estas diferencias de comportamiento macroscópico se relacionaron inmediatamente con la presencia de fluctuaciones de velocidad. Por ejemplo, en el flujo laminar en un tubo, el vector velocidad en cualquier punto es paralelo al eje del tubo. Si el flujo es turbulento, la magnitud y la dirección de la velocidad fluctúan, incluso cuando la velocidad de salida del flujo y las condiciones de contorno son constantes en el tiempo. En un flujo laminar la difusión lateral de cantidad de movimiento y de entalpía se debe completamente a efectos moleculares (viscosidad y conducción térmica), mientras que en un flujo turbulento la difusión se ve aumentada

por los movimientos en bloque del flujo.

Reynolds describía el movimiento que tiene lugar en un flujo turbulento como "sinuoso". El descubrimiento de que la turbulencia es un movimiento estocástico se debe a Taylor (2), quien fué, además, el primero en subrayar la importancia que tienen los segundos momentos estadísticos de las fluctuaciones de velocidad.

En sus experimentos en tubos, Reynolds encontró que cuando un parámetro que dependía de la velocidad media del flujo, al que más tarde se le ha llamado número de Reynolds, excedía un valor de 12000, el flujo pasaba de ser laminar a comportarse como turbulento. En otros casos en que la existencia de movimiento en el fluido va asociado al gradiente de un campo escalar, el paso de régimen laminar al turbulento se produce al alcanzar un valor determinado un parámetro que depende de este gradiente (números de Grashof, de Rayleigh, de Prandtl, de Peclet, ...).

La posibilidad de que al alcanzarse un cierto valor umbral para un parámetro se pase de uno a otro régimen no quiere decir que esta transición esté en el origen de todo flujo turbulento. Hay flujos turbulentos "per se", que nunca han sido laminares. Entre ellos se encuentran flujos muy complicados, como los de la atmósfera o del océano, y otros muy sencillos creados en el laboratorio, como son todos aquellos que resultan de poner en contacto dos fluidos que se mueven con distintas velocidades.

Una parte importante de la investigación sobre fluidos se dirige al estudio del surgimiento de la turbulencia. Estos estudios sobre estabilidad de los regímenes laminares han sido motivados en parte por la importancia práctica que en algunos casos tiene el evitar la aparición de la turbulencia. Por ejemplo, la aparición de turbulencia en el transport de fluidos por tuberías lleva consigo unos efectos disipativos, un aume

del rozamiento y de la temperatura que a veces suponen una pérdida considerable de energía.

Sin embargo existen casos, quizás menos conocidos, en que las características del régimen turbulento lo harían preferible al laminar si pudiera ser predicho su comportamiento. Por ejemplo, en la refrigeración de reactores nucleares el empleo de gases presenta algunas ventajas sobre el de líquidos, como son la de poder emplear gases químicamente inertes (He o  $\text{CO}_2$ ) y la ausencia de cambios de fase. Su principal inconveniente es que los coeficientes de transferencia de calor que se obtienen con ellos son menores que los obtenidos con líquidos. Pero estos coeficientes de transferencia aumentarían enormemente si el flujo de gas fuera turbulento en vez de laminar. Debido a esto se construyen en las paredes de los reactores refrigerados por gas unas irregularidades que favorecen la aparición de turbulencia. Si en este flujo turbulento aparece recirculación entre las irregularidades el poder refrigerante disminuye. Por lo tanto, para optimizar el proceso sería necesario poder predecir el comportamiento medio del flujo turbulento.

El movimiento de un fluido, tanto en régimen laminar como en el turbulento, está descrito por tres ecuaciones: de continuidad, de transporte de momento y de convección. Para un fluido newtoniano, neutro e incompresible estas ecuaciones son:

$$\text{I-1} \quad \partial u_i / \partial x_i = 0$$

$$\text{I-2} \quad \partial_t u_i + u_m \partial_{x_m} u_i - \nu \nabla^2 u_i = -\partial_{x_i} p$$

$$\text{I-3} \quad \partial_t \psi + u_m \partial_{x_m} \psi - \kappa \nabla^2 \psi = 0$$

donde  $u_i$  son las componentes de la velocidad,  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $p$  es la presión por unidad de densidad y  $\psi$  un escalar transportado. En el caso de que este escalar sea la temperatura,  $\kappa$  sería la difusivi-



dad térmica. Si  $\psi$  es la concentración de un soluto,  $\kappa$  sería la difusividad molecular.

El régimen laminar viene dado por las soluciones obvias de estas ecuaciones. Para algunos flujos, incluso relativamente complicados, estas soluciones son conocidas. Sin embargo este conocimiento es solo para casos aislados. Debido al carácter no lineal de las ecuaciones, la solución general de las mismas con condiciones de contorno arbitrarias no ha sido encontrada aún.

Se ha discutido mucho cómo un movimiento descrito por ecuaciones deterministas como las anteriores, puede llegar a ser estocástico. Estas ecuaciones parecen implicar a primera vista que, una vez fijadas las condiciones iniciales y de contorno, el movimiento debería estar determinado para todo instante posterior. Se ha demostrado matemáticamente (3) que para valores de un parámetro próximos a un valor umbral, estas ecuaciones de Navier-Stokes tienen un enorme poder de amplificación. Esto significa que para dos conjuntos de condiciones iniciales muy próximos, las soluciones correspondientes divergen completamente al cabo de algún tiempo. Para plantear correctamente el problema se necesitaría una precisión submolecular en las condiciones iniciales que resulta imposible en la práctica. Hay que considerar siempre el flujo como estocástico, desglorando el campo de velocidades en un campo vectorial medio, definido com

$$I-4 \quad \bar{u}_n(\vec{r}, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T ds u_n(\vec{r}, s)$$

y un campo fluctuante cuyo valor medio es cero. Aceptando que se cumple en estos casos el teorema ergódico, se demuestra que los valores medios resultantes de promediar en el tiempo,  $\bar{u}_n$ , coinciden con los obtenidos promediando a un conjunto de Gibbs de realizaciones del mismo flujo,  $\langle u_n \rangle$ , y ambos son independientes del tiempo  $t_0$  en que comienza la obser

vación. Igualmente el campo escalar de presiones se descompone en un campo medio y uno fluctuante,  $\langle p \rangle$  y  $p'$  respectivamente. Llevando esta descomposición a la ecuación de Navier-Stokes para la velocidad, se obtiene una ecuación para el flujo medio que se conoce como ecuación de Reynolds

$$I-5 \quad \partial_t \langle u_i \rangle + \langle u_j \partial_{x_j} \rangle \langle u_i \rangle + \langle (u'_j \partial_{x_j}) u'_i \rangle = \nu \nabla^2 \langle u_i \rangle - \nabla \langle p \rangle$$

Aparecen aquí unas nuevas incógnitas, los segundos momentos estadísticos de las fluctuaciones de la velocidad,  $\langle u_i u_j \rangle$ , procedentes del término no lineal, y que son independientes del valor medio  $\langle \vec{u} \rangle$ .

A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes es posible derivar una ecuación para estas nuevas variables, pero, de forma similar a la anterior, aparecen en ella de nuevo otras variables independientes, esta vez momentos estadísticos de tercer orden. Repitiendo el proceso encontramos una jerarquía de ecuaciones acopladas, cada vez más complejas y con la dificultad de que para resolver una de las ecuaciones de orden  $n$  hay que haber encontrado previamente la solución de todas las de ordenes superiores. Este procedimiento directo carece de sentido al ser infinitas las ecuaciones de la jerarquía. El procedimiento que parece correcto es tratar de encontrar una forma de cerrar esta, es decir, de expresar las correlaciones de órdenes superiores en función de las de orden inferior.

Si se supone isotropía y homogeneidad en el sistema físico, las ecuaciones de la jerarquía se simplifican mucho, y es posible proponer cierres con significado físico inmediato. Por ello, este tipo de turbulencia ha sido objeto de muchos estudios desde que comenzó el interés por el problema, a pesar de ser un flujo que no existe en la práctica salvo en algunas condiciones muy particulares y aún así solo como idealización.

Podemos considerar como turbulencia homogénea e isotrópica, localmente, la atmosférica a pequeña escala, y en el laboratorio, el flujo detrás de una rejilla en el túnel aerodinámico.

Estudiando este tipo de turbulencia se han encontrado relaciones de gran generalidad, como son las hipótesis de similaridad de Kolmogorov-Obhukov (4) y la teoría de invariantes. Las hipótesis de similaridad prescriben una dependencia funcional para el espectro (relacionado con las transformadas de Fourier de los segundos momentos de las velocidades) que, para el rango inercial (número de onda  $k$  pequeño), es de la forma  $k^{-5/3}$ . Esta dependencia se ha comprobado experimentalmente, y constituye un test de validez para cualquier teoría de la turbulencia. Los invariantes son soluciones de una ecuación de invariancia derivada de la de los segundos momentos (Howarth-vonKarman) y permiten abordar el problema de las condiciones iniciales.

Sin embargo, los flujos que aparecen en la realidad, que interesan al ingeniero, al meteorólogo, al oceanógrafo o al químico, no son ni homogéneos ni isotrópicos. La segunda ecuación de la jerarquía es muy complicada para ellos y para proponer un cierre con sentido hay que hacer aproximaciones que permitan simplificar. Así, se han propuesto cierres particulares para algunos flujos sencillos, y se ha intentado su extrapolación a otros más complicados por ajuste de constantes: son los llamados modelos semiempíricos. El primer modelo de estos, propuesto por Boussinesq en 1887, era un modelo muy sencillo, de una sola ecuación. Con el desarrollo de las computadoras se han propuesto modelos más completos, de dos y hasta de tres ecuaciones. Recientemente, Launder, Reece y Rodi (5) han propuesto un modelo de tres ecuaciones, válido para trece tipos distintos de flujo, que parece estar próximo a una descripción correcta de la realidad física para estos tipos de flujo.

Se han propuesto un conjunto de teorías para cerrar la jerarquía de ecuaciones de la turbulencia homogénea e isotrópica utilizando hipótesis matemáticas que pueden formularse de forma exacta. Entre ellas se distinguen las analíticas y las funcionales. Las teorías funcionales (Hopf, Edwards, etc) obtienen una ecuación para el funcional característico de la distribución de probabilidad a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Esta ecuación contiene derivadas funcionales y por ello es por ahora irresoluble. Entre las teorías analíticas están la hipótesis de cuasi normalidad de Millionshtchikov, el desarrollo del campo fluctuante en serie de polinomios de Wiener y la aproximación de interacción directa de Kraichnan (DIA) (6,7,...,15)

La DIA parte de la ecuación de Navier-Stokes y de la asociada para la función de Green, a la que llama función de respuesta infinitesimal. Si la velocidad fluctuante y la función de respuesta infinitesimal se desarrollan en serie, se obtiene un conjunto de ecuaciones a partir de las dos anteriores. El cierre se realiza considerando la primera aproximación a las funciones como las funciones exactas. En la sección 2 de esta memoria se ha detallado esta deducción, así como la aplicación de la DIA a flujos homogéneos e isotrópicos.

Pese a que no es posible dar una justificación matemática al procedimiento empleado para el cierre (se trunca una serie cuyo parámetro es de orden de la unidad), el hecho de ser autoconsistente y la posibilidad de poder calcular con ella, hacen que la DIA se considere como la más prometedora de las teorías analíticas. Ya en sus primeros trabajos derivó Kraichnan un valor para la constante de Kolmogorov muy próximo al valor experimental. Sin embargo la dependencia funcional del espectro predicha fue de  $k^{-3/2}$ , en desacuerdo con la obtenida por Kolmogorov y Obukhov empleando las leyes de similitud. Cuando la dependencia  $k^{-5/3}$  se compro-

bó experimentalmente (16), se hizo evidente, analizando los cálculos realizados, que el error se debía al método empleado por Kraichnan para eliminar una divergencia que aparecía como consecuencia de la utilización de funciones de Green.

Reflexionando sobre ella, Kraichnan encontró que la DIA, propuesta a partir de una descripción euleriana era solo válida para números de Reynolds suficientemente altos como para que la turbulencia se hubiera desarrollado completamente (la DIA, como la mayoría de las teorías analíticas, no es válida para la transición del régimen laminar al turbulento). Pero si el número de Reynolds excedía de un valor determinado se precisaba una teoría que fuese invariante bajo transformaciones de Galileo. Resucitó así una idea formulada ya por Taylor en 1921: la necesidad de una descripción lagrangiana del flujo. Así nacieron las teorías lagrangianas de interacción directa (ALI y LHDI).

Sin recurrir a una descripción lagrangiana, Leslie (17) ha propuesto una forma de suprimir la divergencia, con la que el espectro obtenido para turbulencia homogénea e isotrópica coincide con el de Kolmogorov.

Paralelamente a la aparición de la DIA, en parte debido al desarrollo de grandes ordenadores cada vez más potentes, se iniciaron estudios para resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos turbulentos homogéneos e isotrópicos. Se suponían conjuntos distintos de condiciones iniciales, promediando luego todas las soluciones obtenidas. Estos cálculos, debidos a Orszag (18,19) se conocen como simulación espectral directa (DSS). Kraichnan modificó también su teoría para adecuarla al cálculo numérico. La complejidad de las ecuaciones y el hecho de que sean tridimensionales, hacen que estos cálculos solo hayan podido ser abordados por los grandes ordenadores CDC del National Center for

Athmospheric Research, Boulder, Colorado.

Entre los resultados de estos cálculos obtenidos a partir de la DIA y los de la DSS se observa buen acuerdo, aunque en algunos casos aparecen resultados sin sentido físico, atribuibles, especialmente en la DSS, a fallos de los algoritmos utilizados, enormemente complejos. Si esto ocurre con la turbulencia homogénea e isotrópica, parece que la utilización de ambos métodos en un estudio de flujos reales, en los que debido a las condiciones de contorno no se puede pasar al espacio de números de onda, será enormemente difícil.

El siguiente objetivo después de la turbulencia homogénea e isotrópica fue un flujo homogéneo con simetría axial. Tal flujo no existe, aunque puede considerarse como una buena idealización del que aparece cerca de la rejilla, pero lejos de las paredes, en el túnel aerodinámico. Schumann y Herring (20) han efectuado un cálculo para este flujo utilizando la DSS y la DIA modificada y encontrado un valor para una constante del término de redistribución, (término que incluye la presión), que coincide con el valor ajustado por Rotta (21) en su modelo semiempírico.

En Septiembre de 1976 tuvo lugar un encuentro en el que los principales investigadores en este campo discutieron con Leslie (Queen Mary College) y Herring (NCAR) cómo se podía aplicar la DIA a los flujos reales (22). Se había seleccionado previamente dos flujos como los más idóneos: el flujo en un canal de lados paralelos infinitos y la convección natural entre placas paralelas también infinitas. Son los dos flujos reales más sencillos con condiciones de contorno fijas y se han venido utilizando para ajustar las constantes de los modelos semiempíricos.

En una simulación numérica, la convección natural tiene la ventaja de poder considerarse, debido a su simetría, como plana, mientras que en el canal, en principio, hay que considerar tridimensionalidad. (Existe, sin

embargo la evidencia experimental de que las dos direcciones ortogonales a la del flujo medio son equivalentes). Por otra parte en el canal hay que resolver solamente las ecuaciones para la velocidad, mientras que en la convección hay que resolver una ecuación adicional para la temperatura.

La importancia práctica de la convección es sin duda mucho mayor, pero el canal tiene un flujo medio conocido, lo que no ocurre para aquella, y además, debido a la enorme dificultad que implica utilizar sondas térmicas no perturbativas, existe mucha más información experimental con la que poder comparar nuestros cálculos para el canal.

En la discusión se evidenciaron dos posturas. Por un lado, el equipo del NACR era partidario de esperar para atacar el problema a la aparición de los nuevos ordenadores vectoriales que se preveían para la década de los 80, mientras que el equipo del QMC era partidario de atacar el problema con los ordenadores disponibles, aunque el cálculo fuera sólo aproximado. Según Leslie se trataba de poder comparar con los experimentos.

Se discutió en qué condiciones podría ser utilizada la DIA para el cálculo en el caso del canal. Se ha comprobado que la DIA funciona bien entre números de Reynolds turbulentos  $Re_\lambda$  mayores que 50 e inferiores a 500. (El n° de Reynolds turbulento se define como  $Re_\lambda = (4E_0^2/\nu\epsilon)^{1/2}$ ), lo que corresponde a números de Reynolds entre  $10^5$  y  $10^6$ . Para  $Re$  superiores se ha comprobado que es preciso utilizar descripciones lagrangianas. Una estimación sobre el número de puntos de cálculo precisos para simular toda la estructura de la turbulencia en estas condiciones dió un valor de  $24 \cdot 10^6$ . Ante esta cifra, Leslie arguyó que incluso empleando la nueva generación de operadores vectoriales, una aproximación sería necesaria.

No hubo acuerdo entre los dos grupos, y el equipo de QMC decidió iniciar un conjunto de cálculos aproximados para la turbulencia del canal. A consecuencia de esta decisión se inició un trabajo en el que se simulaba la estructura de la turbulencia. Al ser esta simulación imposible para todos los órdenes de longitud que intervienen en la cascada de vórtices, la simulación se limitó a los rangos de producción e inercial. Por ello, cuando la energía pasaba a los términos en que dominaban distancias inferiores a una dada, era sustraída mediante un algoritmo. El resultado de este trabajo fué una simulación, en la que aparecían líneas cerradas, análogas a los vórtices, que se iban creando y deformando a lo largo del canal, y que parecen corresponder bastante bien a la estructura grande e inercial de la turbulencia, pero que en ningún caso permiten una comparación cuantitativa con resultados experimentales.

En un trabajo publicado en 1973, Leslie proponía otra vía para intentar aplicar la DIA a los flujos reales. Se trataba de abordar un cálculo analítico en una región del canal en que pudiera prescindirse de alguno de los términos que aparecían en las ecuaciones de los flujos con cizalla. Esto ocurre en una zona próxima aunque no inmediata a la pared del canal, conocida como región inercial o capa logarítmica. En esta zona el flujo medio tiene una forma sencilla, que es universal y que además se pudo predecir teóricamente a partir de consideraciones dimensionales. Experimentalmente se ha comprobado que, como su nombre indica, en ella la producción y disipación de la energía turbulenta son poco importantes frente al transporte inercial. Leslie proponía en esta región unas ecuaciones en las que se prescindía del término en que interviene la viscosidad. Las dificultades inherentes al cálculo propuesto eran de tres tipos. Uno se debía a la forma integrodiferencial de las ecuaciones. La segunda dificultad consistía en cómo imponer condiciones



iniciales ,puesto que la DIA es válida sólo para un flujo turbulento completamente desarrollado.La tercera se refería a las condiciones de contorno a imponer a un flujo definido asintoticamente.

La estructura matemática de las ecuaciones para las correlaciones y la función de respuesta infinitesimal propuestas por Leslie para est flujo se puede escribir en forma abreviada como

$$I-6 \quad A(x,x') + \int B(x,y)C(x',y)d^3y = \delta(x-x')$$

donde  $A(x,x')$  representa al término  $\partial_t Q + P(V)\{UQ\}$  mientras que el segundo sumando incluye la expresión por la que se sustituyen las correlaciones triples en la DIA.El procedimiento habitual para intentar resolver una ecuación integrodiferencial es buscar una representación en la que sean diagonales las tres funciones  $A,B$  y  $C$ .Si  $\phi_n$  es un conjunto de funciones que forman una base de esta representación( para lo cual deben ser simultaneamente funciones propias de los operadores  $A,B$  y  $C$ ),se puede escribir:

$$I-7 \quad A(x,x') = \sum A_n \phi_n(x) \phi_n^*(x')$$

con lo cual la ecuación I-6 se reduce a:

$$I-8 \quad A_n + B_n C_n^* = 1$$

Para un flujo homogéneo ,las  $\phi_n$  son las funciones de Fourier, $\exp(ikx)$  La transformación a realizar en ese caso es la compleja de Fourier,y convierte los operadores diferenciales e integrales en operadores de multiplicación.Cuando no hay homogeneidad tal transformación no es posible.Las funciones  $\exp(ikx)$  no son funciones propias del operador  $P(V)$ ,ya que cuando no hay homogeneidad nos encontramos con un operador integro-diferencial en vez de con un operador diferencial.La transformación compleja de Fourier,por otra parte,es posible sólo en las dos direcciones en que las dimensiones del canal son infinitas,mientras que en la dirección transversal al flujo en la que el canal tiene dimensio

nes finitas habría que realizar un desarrollo en serie de Fourier que no nos transformaría el operador integral en multiplicativo. Un desarrollo tomando como base las funciones  $D(x,y)$ , funciones de Green en la ecuación de la presión, que resultan ser un producto de senos y cosenos (vease apéndice 1), parece apropiado porque diagonalizaría el operador  $P(\nabla)$ , pero no conseguiría diagonalizar las funciones que se encuentran bajo el signo de integración. Leslie investigó también el resultado de desarrollar en serie de polinomios, lo que correspondería a una transformación de Mellin, ya que ésta se define:

$$I-7 \quad \hat{f}(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} f(x) dx$$

El desarrollo intentado no fué tampoco adecuado.

Cuando inicié el estudio de este problema (1975) me pareció evidente que dichas funciones no existían, aunque me fué imposible encontrar en bibliografía matemática un teorema para estos operadores en uno u otro sentido. Elegí entonces otro enfoque para intentar su resolución. Si tenemos en cuenta que Leslie, para simplificar las ecuaciones utiliza información experimental sobre los términos de la ecuación de la energía, me pareció que esta información podía utilizarse no solo para depreciar el término de disipación, sino para tener en cuenta el orden de magnitud relativo de los restantes términos. En la sección 3 de esta memoria se ha resumido dicha información. Con ella parece razonable intentar para I-6 un procedimiento iterativo, puesto que el término integral en la región inercial se puede considerar pequeño. En el apéndice 1 se estudia el operador  $P(\nabla)$  y en la sección 4 se discute su aproximación por un operador diferencial.

En la sección 4 de esta memoria se resuelven las ecuaciones para las correlaciones y la función de respuesta infinitesimal hasta la primera iteración. Las funciones que resultan de nuestros cálculos se compa-

ran con los experimentales disponibles, aunque estos solo llegan al límite de la capa logarítmica con la región central del canal.

Por último en la sección 5 calculamos el espectro de este flujo, según la definición de Leslie. Haciendo una hipótesis de forma espectral invariante calculamos algunas funciones universales para el rango inercial.

## LA APROXIMACION DE INTERACCION DIRECTA

La teoría de la turbulencia conocida como "Aproximación de Interacción Directa" o DIA, debida a R.J.Kraichnan, ha sido expuesta por éste en una serie de artículos que van desde 1958 hasta el presente. De uno a otro de estos trabajos se modifica la formulación y se rectifican algunos puntos. De la proposición de una teoría basada en una descripción euleriana del flujo como es la DIA en su formulación original, se pasa a proponer la necesidad de una descripción lagrangiana. La DIA debe ser reformulada dentro de este marco, y aparecen la LHDI (Lagrangian History Direct Interaction) y la ALI (Abridged Lagrangian Interaction). Nosotros haremos en lo que sigue una exposición sucinta de la DIA siguiendo el enfoque expuesto por D.C.Leslie (17).

Existen también diversas justificaciones de la DIA y análisis sobre sus hipótesis entre los que destaca por su completitud y generalidad el de Martin *et al.* (24), en el que, utilizando la jerarquía de ecuaciones obtenidas mediante un tratamiento estadístico iterativo de la ecuación de transporte de momento, realizando una transformación de contacto y tomando hasta el segundo orden en el desarrollo en serie, se obtienen las ecuaciones de Kraichnan. Sin embargo es suficiente para nuestras necesidades el exponer aquí la justificación menos exhaustiva aunque correcta dada por Wyld en su ya clásico artículo (25).

Como las ecuaciones a partir de las que se formula la DIA son las correspondientes al caso homogéneo e isótropo, es preciso deducir éstas a partir de las ecuaciones generales de movimiento de fluidos.

### 1.-TURBULENCIA HOMOGÉNEA E ISÓTROPA

Homogeneidad implica uniformidad en el espacio. En un campo de veloci-

dades homogéneo las correlaciones  $q_{ij}(\vec{r}) = \langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle$  entre componentes de velocidad en los puntos  $\vec{x}$  y  $\vec{x} + \vec{r}$  son solamente función de  $\vec{r}$ . Los valores medios estadísticos, como la energía total turbulenta  $E_0 = (1/2) \langle u_i(\vec{x}) u_i(\vec{x}) \rangle$  permanecen constantes al desplazarnos en el espacio. La isotropía equivale a imponer la invariancia frente a rotaciones. No habrá ninguna dirección privilegiada y por tanto la velocidad media en un campo de velocidades (fluctuantes) isótropo debe ser cero. Partimos de las ecuaciones de continuidad y transporte de momento para un fluido incompresible:

$$\text{II-1} \quad (\partial u_i / \partial x_i) = 0$$

$$\text{II-2} \quad (\partial u_i / \partial t) + u_m (\partial u_i / \partial x_m) - \nu \nabla^2 u_i = -(\partial p / \partial x_i)$$

donde hemos dividido por la densidad  $\rho$ .  $u_i$  y  $u_m$  son las componentes  $i$  y  $m$ -ésimas de la velocidad,  $\nu$  es la viscosidad cinemática, de dimensiones  $L^2 T^{-1}$ .  $p$  es el cociente entre la presión y la densidad y  $\nabla^2$  es el operador de Laplace.

Utilizando II-1 podemos escribir II-2 como

$$\text{II-3} \quad (\partial u_i / \partial t) + (\partial (u_i u_m) / \partial x_m) - \nu \nabla^2 u_i = -(\partial p / \partial x_i).$$

Tomando la divergencia de esta ecuación y utilizando de nuevo I-1 obtenemos para la presión:

$$\text{II-4} \quad p = (1/\nabla^2) (\partial^2 (u_i u_m) / \partial x_i \partial x_m)$$

donde  $(1/\nabla^2)$  es el operador inverso al operador de Laplace. Mediante II-4 puede eliminarse de II-3 la presión y obtener una ecuación en la que solo aparezcan las velocidades:

$$\text{II-5} \quad (\partial u_i / \partial t) - \nu \nabla^2 u_i = -(1/2) P_{ijm}(\nabla) (u_j u_m)$$

donde

$$\text{II-6} \quad P_{ijm}(\nabla) = \partial_{x_m} P_{ij}(\nabla) + \partial_{x_j} P_{im}(\nabla)$$

$$\text{II-7} \quad P_{ij}(\nabla) = \delta_{ij} - \nabla^{-2} (\partial/\partial x_i \partial x_j).$$

La ecuación II-5 es una ecuación diferencial no lineal. Como nos limitamos al caso homogéneo podemos pasar al espacio de números de onda mediante una transformación de Fourier. Los operadores diferenciales en el espacio de configuración pasan a operadores de multiplicación y el problema se simplifica mucho.

Al considerar la turbulencia homogénea e isotrópica el campo de velocidades debe extenderse hasta el infinito. Para ello supondremos primero el campo turbulento encerrado en una caja de dimensiones  $a_1, a_2, a_3$  con condiciones cíclicas de contorno. Definimos la transformación de Fourier como

$$\text{II-8} \quad u_j(\vec{x}) = (2\pi)^3 (a_1 a_2 a_3)^{-1} \int_{\vec{k}} u_j(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{x})$$

donde  $\vec{k}$  es un vector de onda de la forma  $(2\pi k_1/a_1, 2\pi k_2/a_2, 2\pi k_3/a_3)$  con  $k_i$  números enteros. Al hacer crecer los lados  $a_i$  de la caja hacia infinito encontramos la forma standard:

$$\text{II-9} \quad u_j(\vec{x}) = \int d^3k u_j(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{x})$$

y la transformación inversa:

$$\text{II-10} \quad u_j(\vec{k}) = (2\pi)^{-3} \int d^3x u_j(\vec{x}) \exp(-i\vec{k}\vec{x}).$$

La ecuación II-5 se convierte mediante esta transformación en la II-12 escrita a continuación en la que aparece, i) un término de evolución, ii) un término lineal que contiene la viscosidad, iii) un término no lineal. Mientras que en la transformación el término de evolución no cambia de forma, el operador laplaciano se convierte en un factor  $k^2$  y el término

no lineal tiene la siguiente forma

$$(2)^{-3} \int_V d^3x \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}) u_j(\vec{x}) u_m(\vec{x}) = \sum_{\vec{p}, \vec{r}} u_j(\vec{p}) u_m(\vec{r}) \left( \frac{(2\pi)^3}{(a_1 a_2 a_3)^3} \right) \int_V d^3x \exp(-i(\vec{k} - (\vec{p} + \vec{r}))\cdot\vec{x}) =$$

$$= \left( \frac{(2\pi)^3}{(a_1 a_2 a_3)^3} \right) \sum_{\vec{p}, \vec{r}} u_j(\vec{p}) u_m(\vec{r}) \delta_{\vec{k}, \vec{p} + \vec{r}}$$

donde  $\delta_{\vec{k}, \vec{p} + \vec{r}}$  es una delta de Kronecker. Al hacer tender  $V$  hacia infinito la expresión anterior se convierte en

$$\text{II-11} \quad \int d^3p \, d^3r \, u_j(\vec{p}) u_m(\vec{r}) \delta(\vec{k} - (\vec{p} + \vec{r}))$$

donde ahora  $\delta(\vec{k} - (\vec{p} + \vec{r}))$  es una distribución tridimensional de Dirac.

La ecuación II-5 pasa a ser

$$\text{II-12} \quad (d_t + \nu k^2) u_i(\vec{k}) = M_{ijm}(\vec{k}) \sum_{\vec{p}} u_j(\vec{p}) u_m(\vec{r})$$

donde escribimos simbólicamente II-11 utilizando  $\sum_{\vec{p}}$  y donde  $M_{ijm}$  es el operador multiplicativo

$$\text{II-13} \quad M_{ijm}(\vec{k}) = -(i/2) P_{ijm}(\vec{k})$$

$$\text{II-14} \quad P_{ijm}(\vec{k}) = k_m P_{ij}(\vec{k}) + k_j P_{im}(\vec{k})$$

$$\text{II-15} \quad P_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - (k_i k_j / k^2)$$

donde hemos utilizado el símbolo  $i$  para denotar la unidad imaginaria y evitar confusiones con los subíndices  $i$ .

La ecuación II-12 no puede describir un movimiento turbulento estacionario, ya que al ser nula la velocidad media no existe ningún término que produzca la energía disipada por la viscosidad. Para que esta ecuación pueda representar un movimiento estacionario es preciso introducir una fuerza ficticia que representa acciones exteriores sobre el flujo y cuyo carácter responde también a la irrealidad de las condiciones de homogeneidad e isotropía impuestas.

En la bibliografía inglesa se suele denominar "stirring force" a esta fuerza  $f_i(k)$ , que tiene un carácter estocástico. Incluyéndola en nuestras consideraciones la ecuación II-12 pasa a ser

$$\text{II-16} \quad (d_t + \nu k^2) u_i(\vec{k}) = M_{ijm}(\vec{k}) \overset{\Delta}{\sum} u_j(\vec{p}) u_m(\vec{r}) + f_i(\vec{k}).$$

El símbolo  $\overset{\Delta}{\sum}$  indica que los modos de número de onda  $\vec{p}$  y  $\vec{r}$  interaccionan para extraer o introducir energía en el modo  $\vec{k}$  solo si se cumple la condición  $\vec{k} = \vec{p} + \vec{r}$ .

Se definen las correlaciones o momentos estadísticos de segundo orden entre componentes de la velocidad como:

$$\text{II-17} \quad Q_{ij}(\vec{k}, t-t') = \langle u_i(\vec{k}, t) u_j(-\vec{k}, t') \rangle$$

donde estamos suponiendo estacionariedad al escribir que la dependencia temporal es solo a través de la diferencia de tiempos.

Obtenemos una ecuación para los segundos momentos multiplicando II-16 escrita para  $u_i(\vec{k}, t)$  por  $u_n(-\vec{k}, t')$  y haciendo el promedio a un conjunto canónico de Gibbs:

$$\text{II-18} \quad (d_t + \nu k^2) Q_{in}(\vec{k}, t-t') = M_{ijm}(\vec{k}) \overset{\Delta}{\sum} \langle u_j(\vec{p}, t) u_m(\vec{r}, t) u_n(-\vec{k}, t') \rangle + \langle f_i(\vec{k}, t) u_n(-\vec{k}, t') \rangle.$$

Esta ecuación debe ser satisfecha por las correlaciones entre componentes de la velocidad en todo campo de velocidades turbulento y homogéneo.

La isotropía se expresa por la condición:

$$\text{II-19} \quad Q_{ij}(\vec{k}, t-t') = P_{in}(\vec{k}) Q(k, t-t')$$

donde  $Q(k, t-t')$  es una función escalar del módulo del vector  $\vec{k}$ .

El término no lineal (el primero del segundo miembro) de la ecuación II-16 no puede crear ni destruir energía. Este término representa un transporte de energía de un lugar a otro en el espacio de configuraciones o entre modos de distinto número de onda en el espacio de Fourier, por lo que se le suele denominar término de transferencia inercial. Kolmogorov



postuló en 1941 (4) que esta transferencia es un fenómeno local considerando muy pequeña la probabilidad de transferencia de energía entre números de onda muy distantes. De acuerdo con esto dividió el espectro de energías en tres rangos:

1) Rango de producción.- Números de onda muy pequeños, del tamaño del inverso de la longitud característica del problema (p.ej. diámetro del canal en el que se produce el flujo, diámetro de la rendija en el caso de un chorro, etc.).

2) Rango de disipación.- En él se disipa la energía mecánica en térmica. Números muy altos de onda, del orden del inverso de la longitud característica del rango definida por

$$l_s = (v^3/\epsilon)^{1/3}.$$

$\epsilon$  representa la energía disipada y se define como

$$\epsilon = \int d^3k \, 2\nu k^2 Q(k, 0).$$

3) Rango inercial.- Números de onda altos frente a los del rango de producción y bajos frente a los del rango de disipación. En este rango se transporta la energía entre los otros dos.

Si el postulado de Kolmogorov es correcto estos rangos interaccionan poco entre sí. Por consiguiente la forma del espectro de energía en el rango inercial se verá afectada muy poco por la forma en que esta energía es producida. Este espectro de energía  $E(k)$  se define a partir de:

$$\epsilon = \int_0^\infty dk \, 2\nu k^2 \, 4\pi k^2 Q(k, 0) = \int_0^\infty dk \, E(k) \, 2\nu k^2$$

En un campo estacionario la producción debe contrarrestar el efecto de la disipación. Para la turbulencia homogénea e isotrópica el espectro en los rangos inercial y de disipación debe depender solamente de  $\epsilon$  y  $\nu$ . Por consideraciones dimensionales Kolmogorov llegó a la conclusión de que la

forma de  $E(k)$  debe ser:

$$E(k) = g(v^{3/4} \epsilon^{-1/4} k) \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

donde  $g$  es una función arbitraria de sus argumentos.

En el rango puramente inercial, como el efecto de la viscosidad es muy pequeño,  $E(k)$  debe venir dado por

$$E(k) = K_0 \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

donde la constante  $K_0 = g(0)$  se conoce como constante de Kolmogorov.

Se suele llamar ley de los  $5/3$  a la dependencia en  $k$  del espectro. Esta ley se comprobó experimentalmente entre los años 50-60 y los valores dados para  $K_0$  están alrededor de 1.44 (16).

Toda teoría de la turbulencia debe predecir para la turbulencia homogénea e isotrópica un espectro que en el rango inercial satisfaga una dependencia en  $k$  como  $k^{-5/3}$  y suministrar un valor para  $K_0$  próximo al valor dado más arriba.

## 2.-LA APROXIMACION DE INTERACCION DIRECTA

Sea un conjunto de infinitos sistemas iguales (conjunto canónico de Gibbs) en cada uno de los cuales se ha originado un movimiento turbulento homogéneo e isotrópico. Sea  $u_i$  el campo de velocidades en uno cualquiera de los sistemas y  $f_i$  la fuerza de agitación que en ese sistema origina el movimiento. Este campo  $u_i$  debe satisfacer la ecuación II-16.

Sea una perturbación  $\delta f_i$  de la fuerza de agitación  $f_i$  que provoca una modificación  $\delta u_i$  en el campo de velocidades. La ecuación de movimiento es en este caso

$$(d_t + \nu k^2) (u_i(\vec{k}, t) + \delta u_i(\vec{k}, t)) = M_{ijm}(\vec{k}) \sum_{\vec{p}}^A (u_j(\vec{p}, t) + \delta u_j(\vec{p}, t)) (u_m(\vec{r}, t) + \delta u_m(\vec{r}, t)) + f_i(\vec{k}, t) + \delta f_i(\vec{k}, t)$$

Si sustraemos de esta ecuación la II-16 obtenemos la siguiente ecuación

para la modificación de la velocidad:

$$\text{II-20} \quad (d_t + vk^2) \delta u_i(\vec{k}, t) - 2M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j(\vec{p}, t) \delta u_m(\vec{r}, t) - M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} \delta u_i(\vec{p}, t) \delta u_m(\vec{r}, t) = \delta f_i(\vec{k}, t)$$

y suponiendo que la modificación  $\delta u_i(k, t)$  es pequeña, se puede prescindir del tercer sumando quedando la ecuación:

$$\text{II-21} \quad (d_t + vk^2) \delta u_i(\vec{k}, t) - 2M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j(\vec{p}, t) \delta u_m(\vec{r}, t) = \delta f_i(\vec{k}, t)$$

Al mismo tiempo podemos expresar  $\delta u_i(k, t)$  como una respuesta del sistema a la perturbación de la fuerza de agitación en la forma

$$\text{II-22} \quad \delta u_i(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \hat{G}_{in}(\vec{k}, t-t') \delta f_n(\vec{k}, t')$$

donde  $\hat{G}_{in}(k, t)$  es la función de Green completa asociada a la ecuación II-21 que a su vez debe satisfacer:

$$\begin{aligned} \text{II-23} \quad (d_t + vk^2) \hat{G}_{in}(\vec{k}, t, t') - 2M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j(\vec{k}, t) \hat{G}_{mn}(\vec{k}, t, t') &= \delta_{in} \delta(t-t') & t > t' \\ \hat{G}_{ij}(k, t, t') &= 0 & t < t' \end{aligned}$$

Si suponemos un campo turbulento homogéneo e isotrópico que además sea estacionario, podemos escribir  $\hat{G}_{in} = \hat{G}_{in}(k, t-t')$ . En la aproximación de interacción directa se conoce a  $\hat{G}_{in}$  como el tensor de respuesta infinitesimal. Cada uno de los infinitos sistemas que componen el conjunto de Gibbs debe presentar una respuesta diferente a la perturbación de la fuerza de agitación y por lo tanto el valor que en cada sistema toma  $\hat{G}_i$  debe ser a su vez distinto en unos sistemas y en otros.  $\hat{G}_{in}$  es pues una cantidad estocástica y nosotros vamos a utilizar su promedio  $G_{in} = \langle \hat{G}_{in}(k, t-t') \rangle$  realizado en el conjunto canónico.

Si en II-23 hacemos nulo el tercer término del primer miembro, tenemos una ecuación para la función de Green del problema lineal asociado a II-21 :

$$\text{II-24} \quad G_{in}^{(0)}(\vec{k}, t-t') = \delta_{in} \exp(-vk^2(t-t')) \quad t > t'$$

$$\hat{G}_{in}^{(0)}(\vec{k}, t-t') = 0 \quad t < t'$$

$\hat{G}_{in}^{(0)}$  recibe el nombre de tensor viscoso, ya que al desaparecer el término no lineal la dependencia en el tiempo es función solamente de la viscosidad. Como los campos ligados a la velocidad en un fluido incompresible deben satisfacer la ecuación de continuidad con densidad constante, hay que exigir que  $\hat{G}_{in}^{(0)}$  sea solenoidal, por lo que la dependencia en  $\vec{k}$  debe modificarse y venir dada por:

$$\begin{aligned} \text{II-25} \quad \hat{G}_{in}^{(0)}(\vec{k}, t-t') &= P_{in}(\vec{k}) \exp(-\nu k^2 (t-t')) & t > t' \\ \hat{G}_{in}^{(0)}(\vec{k}, t-t') &= 0 & t < t'. \end{aligned}$$

La función  $\hat{G}_{in}^{(0)}$  es estadísticamente determinada ("sharp") ya que puede escribirse

$$\langle \hat{G}_{in}^{(0)}(k, t-t') \rangle = G_{in}^{(0)}(k, t-t').$$

Las ecuaciones II-16 para el campo de velocidades y II-23 para el tensor de respuesta infinitesimal son ecuaciones integrodiferenciales. En estos momentos, la única forma de tratar estas ecuaciones es buscar una solución aproximada mediante un desarrollo en serie de potencias de parámetros. Debido al carácter no lineal de las ecuaciones, estas series se convierten en jerarquías de infinitas ecuaciones acopladas, por lo que se dice que las ecuaciones anteriores tienen una dimensionalidad infinita.

A partir de II-16 y de II-23, Kraichnan deriva un conjunto de ecuaciones para el campo de velocidades y para el tensor de respuesta infinitesimal, asociando un parámetro al término no lineal y desarrollando en serie de potencias de este parámetro los campos anteriores según el siguiente esquema:

$$\text{II-26} \quad (d_t + vk^2) u_i(\vec{k}, t) = \epsilon M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j(\vec{p}, t) u_m(\vec{r}, t) + f_i(\vec{k}, t)$$

$$\text{II-27} \quad (d_t + vk^2) G_{in}(\vec{k}, t-t') = 2\epsilon M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j(\vec{p}, t) G_{mn}(\vec{r}, t-t') + P_{in}(\vec{k}) \delta(t-t')$$

$$\text{II-28} \quad u_i(\vec{k}, t) = u_i^{(0)}(\vec{k}, t) + \epsilon u_i^{(1)}(\vec{k}, t) + O(\epsilon^2)$$

$$\text{II-29} \quad \hat{G}_{in}(\vec{k}, t-t') = G_{in}^{(0)}(\vec{k}, t-t') + \epsilon \hat{G}_{in}^{(1)}(\vec{k}, t-t') + O(\epsilon^2)$$

Substituyendo ahora II-28 en II-26 e igualando términos de igual orden en  $\epsilon$  se obtiene un conjunto de infinitas ecuaciones de las que las dos primeras son:

$$\text{II-30} \quad (d_t + vk^2) u_i^{(0)}(\vec{k}, t) = f_i(\vec{k}, t)$$

$$\text{II-31} \quad (d_t + vk^2) u_i^{(1)}(\vec{k}, t) = M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(0)}(\vec{r}, t).$$

De igual modo, substituyendo II-29 en II-27 obtenemos para el tensor respuesta:

$$\text{II-32} \quad (d_t + vk^2) G_{in}^{(0)}(\vec{k}, t-t') = P_{in}(\vec{k}) \delta(t-t')$$

$$\text{II-33} \quad (d_t + vk^2) \hat{G}_{in}^{(1)}(\vec{k}, t-t') = 2M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j(\vec{p}, t) \hat{G}_{mn}(\vec{r}, t-t')$$

La ecuación II-32 ha sido vista ya. Su solución es el tensor de respuesta viscoso.

Procedemos ahora a realizar los promedios al conjunto canónico de sistemas utilizando las siguientes hipótesis:

H-1.-  $u_i^{(0)}$  tiene una función de distribución de probabilidad gaussiana centrada en cero, lo que implica suponer esta misma distribución para la fuerza de agitación  $f_i$ . Esta es una restricción bastante fuerte sobre los posibles tipos de funciones de agitación.

H-2.- A pesar de ser  $\epsilon$  realmente igual a la unidad, truncamos la serie a partir de los términos de segundo orden en  $\epsilon$ , suponiendo pequeños los errores así introducidos.

H-3.-Es posible despreciar los términos de orden  $\epsilon^2$  y superiores y al mismo tiempo hacer en el segundo sumando  $\epsilon = 1, G^{(0)} = G$ , y  $Q^{(0)} = Q$ .

La ecuación resultante es la ecuación que da la DIA para el tensor de respuesta infinitesimal:

$$\text{II-38} \quad (d_t + vk^2)G_{in}(\vec{k}, t-t') = \\ = 4M_{ijm}(\vec{k}) \int_{t'}^{\Delta} dt'' G_{ms}(\vec{r}, t-t'') M_{sab}(\vec{r}) Q_{ja}(\vec{p}, t-t'') G_{bn}(\vec{k}, t''-t') + P_{in}(\vec{k}) \delta(t-t')$$

Para obtener la ecuación de la DIA para las correlaciones procederemos de forma análoga. Partiendo de II-27, multiplicando esta ecuación por  $u_j(-\vec{k}, t')$  y promediando al conjunto canónico obtenemos:

$$(d_t + vk^2) \langle u_i(\vec{k}, t) u_j(-\vec{k}, t') \rangle = \epsilon M_{ism}(\vec{k}) \int_{t'}^{\Delta} \langle u_s(\vec{p}, t) u_m(\vec{r}, t) u_j(-\vec{k}, t') \rangle + \langle f_i(\vec{k}, t) u_j(-\vec{k}, t') \rangle$$

y desarrollando el término no lineal:

$$\langle u_s(\vec{p}, t) u_m(\vec{r}, t) u_j(-\vec{k}, t') \rangle = \langle u_s^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(0)}(\vec{r}, t) u_j^{(0)}(-\vec{k}, t') \rangle + \epsilon \langle u_s^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(0)}(\vec{r}, t) u_j^{(1)}(-\vec{k}, t') \rangle + \\ + \text{dos términos análogos} + O(\epsilon^2)$$

Según la hipótesis H-1, el primer término se anula. Para los restantes podemos expresar  $u^{(1)}$  en función de  $u^{(0)}$  utilizando la ecuación II-31:

$$u_j^{(1)}(-\vec{k}, t') = - \int_{-\infty}^{t'} dt'' G_{ja}^{(0)}(\vec{k}, t'-t'') M_{abc}(\vec{k}) \int_{t''}^{\Delta} u_b^{(0)}(\vec{o}, t'') u_c^{(0)}(\vec{l}, t'')$$

de forma que sustituyendo en la expresión correspondiente

$$\langle u_s^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(0)}(\vec{r}, t) u_j^{(0)}(-\vec{k}, t') \rangle = - \int_{-\infty}^{t'} dt'' G_{ja}^{(0)}(\vec{k}, t'-t'') M_{abc}(\vec{k}) \langle u_s^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(0)}(\vec{r}, t) u_b^{(0)}(\vec{o}, t'') u_c^{(0)}(\vec{l}, t'') \rangle$$

y teniendo en cuenta que la distribución de probabilidad para  $u^{(0)}$  es gaussiana por la hipótesis H-1, podemos descomponer los momentos de orden 4 de la siguiente forma: (escribimos en notación simplificada)

Promediando la ecuación II-27 obtenemos:

$$\text{II-34} \quad (d_t + vk^2) G_{in}(\vec{k}, t-t') - 2M_{ijm}(\vec{k}) \int_{\Delta} \langle u_j(\vec{p}, t) \hat{G}_{mn}(\vec{r}, t-t') \rangle + P_{in}(\vec{k}) \delta(t-t').$$

Sustituimos ahora en el sumatorio del segundo término del miembro de la izquierda el producto  $u\hat{G}$  por el producto de sus desarrollos en serie

$$\langle u\hat{G} \rangle = \langle u^{(0)} \hat{G}^{(0)} \rangle + \epsilon \langle u^{(1)} \hat{G}^{(0)} \rangle + \epsilon \langle u^{(0)} \hat{G}^{(1)} \rangle + O(\epsilon^2)$$

Esta expresión puede simplificarse ya que

$$\langle u^{(0)} \hat{G}^{(0)} \rangle + \epsilon \langle u^{(1)} \hat{G}^{(0)} \rangle = G^{(0)} \langle u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} \rangle = 0.$$

Esta expresión es válida hasta el segundo orden en  $\epsilon$ , consistentemente con la anterior, puesto que  $G^{(0)}$  es una función estadísticamente determinada y el valor medio de las fluctuaciones de velocidad en un flujo homogéneo debe ser nulo. Podemos escribir por tanto:

$$\text{II-35} \quad (d_t + vk^2) G_{in}(\vec{k}, t-t') - 2M_{ijm}(\vec{k}) \int_{\Delta} \epsilon \langle u_j^{(0)}(\vec{p}, t) \hat{G}_{mn}^{(1)}(\vec{r}, t-t') \rangle = P_{in}(\vec{k}) \delta(t-t')$$

Recordando la ecuación II-33 para  $G^{(1)}$ , podemos escribir:

$$\text{II-36} \quad G_{mn}^{(1)}(\vec{r}, t-t') = 2 \int_{\Delta} dt'' G_{ms}^{(0)}(\vec{r}, t-t'') M_{sab}(\vec{r}) \int_{\Delta} u_a^{(0)}(\vec{j}, t'') G_{bn}^{(0)}(\vec{l}, t'-t'')$$

y sustituyendo en II-35 se obtiene la ecuación

$$\text{II-37} \quad (d_t + vk^2) G_{in}(\vec{k}, t-t') - 4\epsilon M_{ijm}(\vec{k}) \int_{\Delta} \int_{\Delta} dt'' G_{ms}^{(0)}(\vec{r}, t-t'') M_{sab}(\vec{r}) Q_{ja}^{(0)}(\vec{p}, t-t'') G_{bn}^{(0)}(\vec{k}, t''-t') = P_{in}(\vec{k}) + O(\epsilon)$$

para el tensor de respuesta infinitesimal, donde

$$Q_{ja}^{(0)}(\vec{p}, t-t'') = \langle u_j^{(0)}(\vec{p}, t) u_a^{(0)}(\vec{p}, t'') \rangle.$$

Para proceder debemos hacer ahora una tercera hipótesis, de naturaleza mucho más drástica que las anteriores y cuya justificación aparecerá solo a posteriori, al concordar los resultados obtenidos con los experimentales.

$$\sum_{\vec{o}+\vec{l}=-\vec{k}} \langle u_s^0(\vec{p}) u_m^0(\vec{r}) u_b^0(\vec{o}) u_c^0(\vec{l}) \rangle = ,$$

$$= \sum_{\vec{o}+\vec{l}=-\vec{k}} \{ \langle u_s^0(\vec{p}) u_m^0(\vec{r}) \rangle \langle u_b^0(\vec{o}) u_c^0(\vec{l}) \rangle + \langle u_s^0(\vec{p}) u_b^0(\vec{o}) \rangle \langle u_m^0(\vec{r}) u_c^0(\vec{l}) \rangle + \langle u_s^0(\vec{p}) u_c^0(\vec{l}) \rangle \langle u_m^0(\vec{r}) u_b^0(\vec{o}) \rangle$$

y además, debido a la homogeneidad debe cumplirse:

$$\langle u_s^0(\vec{p}) u_m^0(\vec{r}) \rangle = q_{sm}(\vec{p}) \delta(\vec{p}+\vec{r})$$

$$\delta(\vec{p}+\vec{r}) = \delta(\vec{k}) \Rightarrow \vec{k} = 0$$

$$M_{ijm}(0) = 0$$

por lo que se anula el primer sumando. En el segundo sumando debe cumplirse:

$$\vec{p}+\vec{r} = \vec{k}, \delta(\vec{p}+\vec{o}) \Rightarrow \vec{p} = -\vec{o}$$

$$\vec{o}+\vec{l} = -\vec{k}, \delta(\vec{r}+\vec{l}) \Rightarrow \vec{r} = -\vec{l}$$

y análogamente en el tercer sumando. Por todo ello resulta:

$$\langle u_s^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(0)}(\vec{r}, t) u_j^{(1)}(-\vec{k}, t) \rangle =$$

$$= -2 \int_{-\infty}^{t'} dt'' G_{ja}^{(0)}(\vec{k}, t'-t'') M_{abc}(\vec{k}) Q_{sb}(\vec{p}, t-t'') Q_{mc}(\vec{r}, t-t'')$$

de forma que la ecuación para las correlaciones según la DIA es:

$$II-39 \quad (d_t + \nu k^2) Q_{ij}(\vec{k}, t-t') =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{t'} dt'' G_{ja}(\vec{k}, t'-t'') M_{abc}(\vec{k}) Q_{sb}(\vec{p}, t-t'') Q_{mc}(\vec{r}, t-t'') + \langle f_i(k, t) u_j(-k, t') \rangle$$

### 3.-JUSTIFICACIÓN DE LA APROXIMACIÓN DE INTERACCIÓN DIRECTA

A nuestro juicio, la mejor justificación junto con un riguroso análisis de las limitaciones de la DIA se debe a Wyld (25), en donde se aborda el problema del cierre de la jerarquía de ecuaciones derivada de las de



continuidad y de transporte de momento mediante un procedimiento sistemático de perturbaciones. Se establece una correspondencia biunívoca entre los términos de las series y un conjunto de diagramas. La serie perturbativa puede ser reordenada y sumada parcialmente utilizando propiedades geométricas de los diagramas y se logra reducir el problema de cierre de la jerarquía al de la resolución de un sistema de tres ecuaciones integrales acopladas, una de las cuales incluye series infinitas. Esta formulación tiene dos ventajas: Se introducen las hipótesis estadísticas de forma exacta y es posible derivar un procedimiento de aproximación sistemático independientemente de dichas hipótesis.

Para ello se parte de las citadas ecuaciones en el caso isótropo y homogéneo una vez realizada la transformación de Fourier al espacio de números de onda y frecuencias. Se incluye como anteriormente hemos dicho una fuerza ficticia de agitación. La ecuación satisfecha por las transformadas de las componentes de la velocidad es:

$$\text{II-40} \quad (-i\omega + \nu k^2) u_i(\vec{k}, \omega) = f_i(\vec{k}, \omega) - \frac{P_{ijm}(\vec{k})}{(VT)^{1/2}} \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ \omega_1+\omega_2=\omega}} u_j(\vec{k}_1, \omega_1) u_m(\vec{k}_2, \omega_2)$$

donde dichas transformadas vienen dadas por:

$$u_i(\vec{x}, t) = (VT)^{-1/2} \int_{\vec{k}, \omega} u_i(\vec{k}, \omega) \exp(i(\vec{k}\vec{x} - \omega t))$$

y análogamente para la  $f_i$ .

Para simplificar el estudio de la serie y de los diagramas correspondientes se sustituye  $P_{ijm}(k)$  por una constante de acoplo  $g$  y se prescindir de subíndices, que serán introducidos de nuevo al final del análisis, así como se volverá entonces a hacer  $g = P_{ijm}$ . La ecuación sin

subíndices que debemos considerar es:

$$\text{II-41 } (-i\omega + vk^2) u(\vec{k}, \omega) = f(\vec{k}, \omega) + (g/(vT))^{1/2} \sum_{\substack{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k} \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega}} u(\vec{k}_1, \omega_1) u(\vec{k}_2, \omega_2)$$

La función de Green del sistema asociado no lineal obtenido de II-41 al poner  $g=0$  es:

$$G_0(\vec{k}, \omega) = (-i\omega + vk^2)^{-1}$$

y la correspondiente velocidad sin perturbar viene dada por

$$u_0(\vec{k}, \omega) = G_0(\vec{k}, \omega) f(\vec{k}, \omega)$$

de forma que II-41 puede escribirse de una forma mas útil como

$$\text{II-42 } u(\vec{k}, \omega) = u_0(\vec{k}, \omega) + G_0(\vec{k}, \omega) (g/(vT))^{1/2} \sum_{\substack{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k} \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega}} u(\vec{k}_1, \omega_1) u(\vec{k}_2, \omega_2)$$

Desarrollando ahora  $u$  en una cierta serie formal como

$$u(\vec{k}, \omega) = u_0(\vec{k}, \omega) + u_1(\vec{k}, \omega) + u_2(\vec{k}, \omega) + \dots$$

podemos identificar:

$$u_1(\vec{k}, \omega) = G_0(\vec{k}, \omega) (g/(vT))^{1/2} \sum u_0(\vec{k}', \omega') u_0(\vec{k} - \vec{k}', \omega - \omega')$$

donde estamos sumando a índices repetidos y hemos empleado directamente las relaciones entre  $\vec{k}_1, \omega_1$  y  $\vec{k}_2, \omega_2$ . De la misma forma tenemos:

$$u_2(\vec{k}, \omega) = G_0(\vec{k}, \omega) (g/(vT))^{1/2} \sum u_0(\vec{k}', \omega') u_1(\vec{k} - \vec{k}', \omega - \omega')$$

.....

.....

Por sustituciones sucesivas podemos poner todos los términos de la serie que da  $u(\vec{k}, \omega)$  en función de productos de  $u_0$ . Por ejemplo:

$$u_2(\vec{k}, \omega) = 2G_0(\vec{k}, \omega) (g/(vT))^{1/2} \sum u_0(\vec{k}', \omega') (g/(vT))^{1/2} \sum (u_0(\vec{k}'', \omega'') u_0(\vec{k} - \vec{k}' - \vec{k}'', \omega - \omega' - \omega'')) (1/2).$$

Es imposible realizar estas sustituciones para los términos altos de la serie, por lo que resulta conveniente escribir estos mediante diagramas.

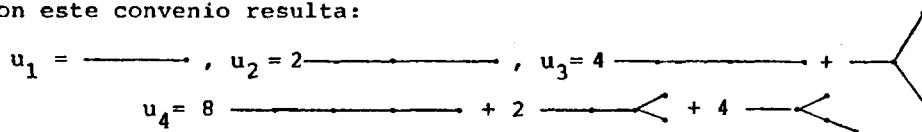
Para ello se establece la correspondencia

$$G_0(\vec{k}, \omega) \text{ ----> línea recta } \delta \text{ propagador}$$

$$g/(VT)^{1/2} \text{ ----> punto } \delta \text{ vértice}$$

Con este convenio resulta:

$$u_1 = \text{---} \cdot , u_2 = 2 \text{---} \cdot , u_3 = 4 \text{---} \cdot + \text{---} \cdot \text{---} \cdot$$

$$u_4 = 8 \text{---} \cdot + 2 \text{---} \cdot \text{---} \cdot + 4 \text{---} \cdot \text{---} \cdot$$


La correspondencia entre términos de la serie y diagramas está regida por unas reglas sencillas:

- 1) Cada vértice es el punto de unión de tres elementos. Estos pueden ser tres propagadores  $G_0$ , ó dos propagadores y un factor  $u_0$ , ó un propagador y dos factores  $u_0$ . Los factores  $u_0$  no se representan en los diagramas, estando siempre implicada su aparición según la presente regla.
- 2) En cada vértice hay conservación de número de onda, es decir, el número de onda del elemento de la izquierda es la suma de los números de onda de los elementos de la derecha.
- 3) Cada diagrama está multiplicado por una potencia de dos. Esta potencia es el producto un factor 2, que va con  $u_0$ , por cada vértice interno del diagrama y un factor 2 por cada ramificación asimétrica.
- 4) Existe una correspondencia biunívoca entre los términos de orden  $n$  de la serie perturbativa y los diagramas con  $n$  vértices en forma de árbol.

Definimos los segundos momentos de la velocidad (prescindiendo de subíndices) como:

$$\langle u(\vec{k}, \omega) u(\vec{k}', \omega') \rangle = \langle u(\vec{k}, \omega) u^*(-\vec{k}', \omega') \rangle = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta(\omega - \omega') Q(\vec{k}, \omega)$$

por estar en el caso homogéneo. Para los momentos de mayor orden se deb cumplir también

$$\langle u(\vec{k}, \omega) u(\vec{k}', \omega') u(\vec{k}'', \omega'') \rangle = 0, \text{ salvo para } \vec{k} + \vec{k}' + \vec{k}'' = 0, \omega + \omega' + \omega'' = 0$$

.....

Con las hipótesis de homogeneidad e isotropía solamente, no tenemos determinado el conjunto estadístico. Es preciso hacer una hipótesis adicional. No parece conveniente hacer ésta sobre las componentes  $u(k, \omega)$  ya que no se les puede dar una interpretación clara debido a su interacción producida por causa del término no lineal en la ecuación de Navier-Stokes. Por ello, Kraichnan hace una hipótesis de máxima estocasticidad sobre las fuerzas  $f$  de agitación y por lo tanto sobre las componentes  $u_0$ , equivalente a suponer para ambas una distribución de probabilidad gaussiana. Esto implica que todos los momentos de orden impar de  $u_0$  son nulos y que los momentos de orden par pueden ponerse en función de los segundos momentos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \langle u_0(\kappa_1) u_0(\kappa_2) u_0(\kappa_3) u_0(\kappa_4) \rangle &= \delta(\kappa_1 - \kappa_2) \delta(\kappa_3 - \kappa_4) Q_0(\kappa_1) Q_0(\kappa_3) + \\ &+ \delta(\kappa_1 - \kappa_3) \delta(\kappa_2 - \kappa_4) Q_0(\kappa_1) Q_0(\kappa_2) + \delta(\kappa_1 - \kappa_4) \delta(\kappa_2 - \kappa_3) Q_0(\kappa_1) Q_0(\kappa_2) \end{aligned}$$

donde hemos agrupado  $\vec{k}$  y  $\omega$  en un solo símbolo  $\kappa$  por razones de simplicidad. Si escribimos ahora las correlaciones utilizando el desarrollo en serie anteriormente expuesto para la velocidad obtenemos:

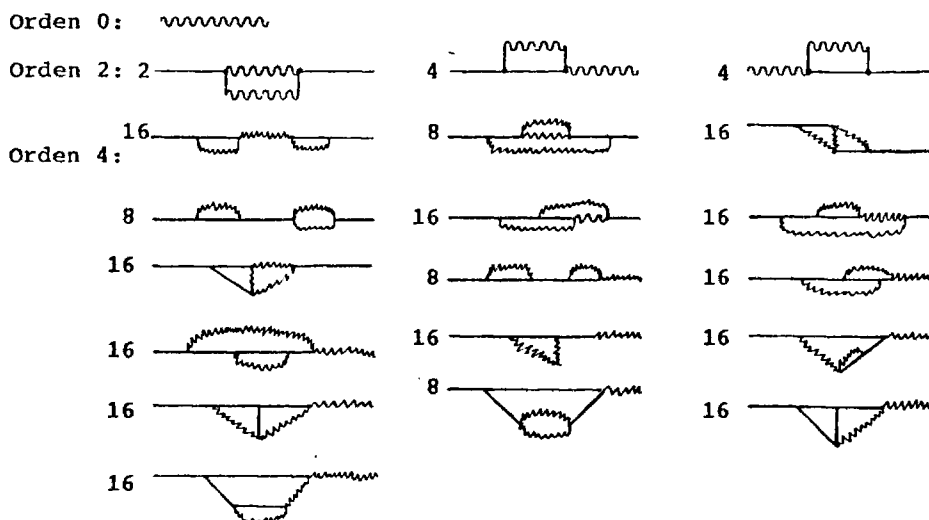
$$\begin{aligned} Q(\kappa) = \langle u(\kappa) u(\kappa) \rangle &= Q_0(\kappa) + \langle u_0(\kappa) u_2^*(\kappa) \rangle + \langle u_1(\kappa) u_1^*(\kappa) \rangle + \\ &+ \langle u_2(\kappa) u_0^*(\kappa) \rangle + \dots \end{aligned}$$

Definiendo un nuevo elemento de los diagramas

$$Q_0(\vec{k}, \omega) \longrightarrow \text{línea ondulada} = \text{~~~~~}$$

podemos escribir la serie de las correlaciones uniendo dos de los diagramas ramificados del desarrollo de la velocidad mediante líneas onduladas entre aquellos vértices que tengan menos de tres elementos.

Así, los órdenes sucesivos del desarrollo de las correlaciones son:



Por ejemplo, el primero de los diagramas de orden 2 corresponde a :

$$2G_0(\kappa) (g/(VT)^{1/2}) \sum_{\kappa'} Q_0(\kappa') Q_0(\kappa - \kappa') (g/(VT)^{1/2}) G_0(-\kappa).$$

Al formar los diagramas se prescinde de todos aquellos en los que una parte estuviera unida al resto sólo por una línea recta, ya que esto sería representar componentes de Fourier de la velocidad media, que es cero en el caso que estamos considerando. Para escribir la serie a partir de los diagramas se tendrán en cuenta las siguientes reglas:

1) Los diagramas se componen de líneas rectas, onduladas y de vértices, que simbolizan los elementos anteriormente citados. De cada vértice salen tres elementos. En cada vértice hay conservación del número de onda, y hay una suma o integral a todos los números de onda no fijados por la condición.

2) Los diagramas de las correlaciones se forman uniendo diagramas ramif

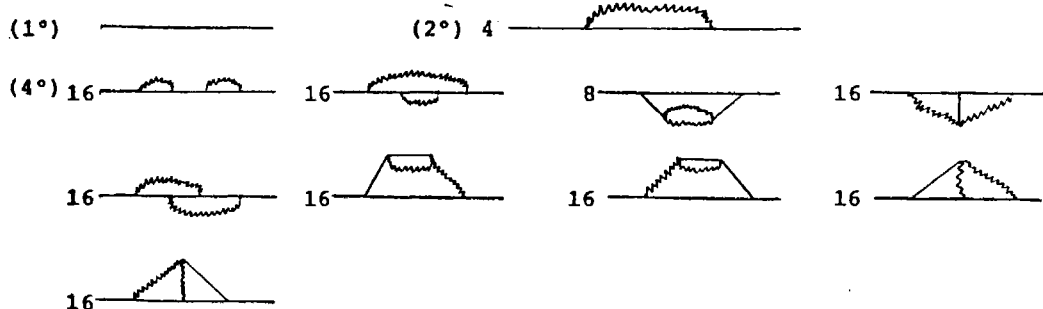
cados mediante líneas onduladas. Para dividir un diagrama en dos es preciso cortar líneas onduladas.

3) Hay una potencia de 2 que multiplica cada diagrama. En general es de la forma  $2^n$ , donde  $n$  es el número de vértices del diagrama. Hay un factor  $1/2$  adicional para aquellos diagramas que contienen un bucle cerrado, formado exclusivamente por líneas onduladas y otro factor  $1/2$  para algunos diagramas de sexto orden cuya simetría es especial.

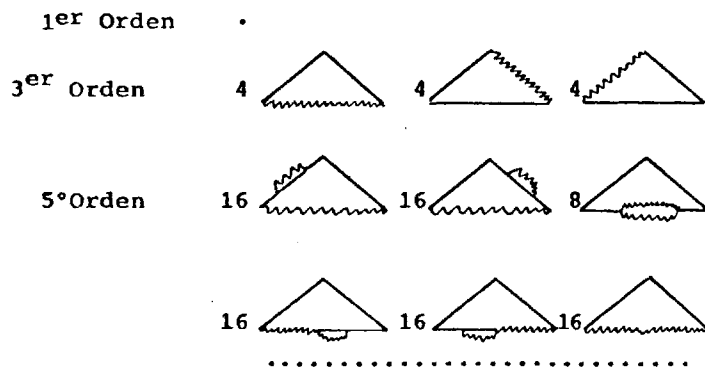
4) Existe una correspondencia biunívoca entre los diagramas obtenidos de esta manera y los términos de la serie de  $Q(\kappa)$

La serie perturbativa de  $Q(\kappa)$  no es muy útil, ya que al no ser la constante de acoplo  $g$  pequeña no se puede prescindir de los términos superiores. Hay que tratar de agrupar los términos de una forma que nos conduzca a otro tipo de desarrollo para las correlaciones de la velocidad. Para ello es necesario definir algunas generalizaciones de los propagadores y del vértice.

Se define el propagador modificado  $G(\kappa)$  como la suma de términos correspondientes a aquellos diagramas que, de forma análoga al propagador simple, tienen una línea recta de un extremo a otro. Se construyen a partir del propagador simple introduciendo líneas onduladas en todas las formas compatibles con la definición recién dada. Los diagramas para este propagador modificado son: (ordenes)



Se define el vértice modificado como la suma de términos correspondientes a aquellos diagramas que, como el propio vértice simple, tienen tres terminales a los que se pueden unir otras líneas, tanto rectas como onduladas. Los tres vértices de cada uno de los sumandos triangulares deben estar unidos al menos por dos líneas rectas consecutivas siendo la tercera ondulada o una combinación de rectas y onduladas. A los extremos de las dos líneas rectas están asociados los números de onda  $\kappa$  y  $\kappa'$ . Los diagramas correspondientes son:



Observando los diagramas se concluye que el propagador modificado  $G(\kappa)$  y el vértice modificado  $\Gamma(\kappa, \kappa')$  son generalizaciones del propagador y del vértice simple en el mismo sentido que  $Q(\kappa)$  es una generalización de  $Q_0(\kappa)$ .

Si tratamos de sumar ahora la serie que da la correlación completa  $Q(\kappa)$  observamos que la mayor parte de los diagramas de órdenes superiores se pueden obtener sustituyendo el propagador simple por el generalizado el vértice simple por el generalizado y/o la función  $Q_0$  por la correspondiente función generalizada.

Analizando los diagramas para la función de correlación, vemos que se

pueden dividirse en dos clases. En la clase A se incluyen todos aquellos que se pueden partir en dos cortando una sola línea ondulada. Dentro de esta clase se incluyen dos diagramas de segundo orden (3 y 4) y diecinueve del cuarto (el 5 y del 16 al 33). Los demás se incluyen en la clase B. De forma inmediata, examinando los diagramas puede verificarse que la suma de los diagramas de la clase A para  $Q(\kappa)$  es:

$$G^*(\vec{k}, \omega) G_0^{-1}(\vec{k}, \omega) Q_0(\vec{k}, \omega) G_0^{-1}(\vec{k}, \omega) G^*(\vec{k}, \omega) = G^*(\vec{k}, \omega) F(\kappa) G^*(\vec{k}, \omega)$$

donde  $F(\kappa) = G_0^{-1}(\vec{k}, \omega) Q_0(\vec{k}, \omega) G_0^{-1}(\vec{k}, \omega) = \langle f^2(\vec{k}, \omega) \rangle$

es la autocorrelación de la transformada de Fourier de la fuerza de agitación.

Dentro de la clase B de diagramas incluimos aquellos que se pueden obtener de diagramas de orden inferior mediante el procedimiento indicado de sustitución de elementos simples por complejos, que denominaremos diagramas reducibles, y otros denominados irreducibles. Así en los diagramas para la correlación, en el segundo orden el diagrama irreducible es el 2, y en el cuarto orden el diagrama 7. Si utilizamos estos dos para realizar sobre ellos las sustituciones indicadas, obtenemos solamente una parte de los diagramas de sexto orden, siendo pues los restantes los irreducibles de ese orden. La expresión diagramática para la serie  $Q(\kappa)$  parcialmente sumada es:

$$\text{~~~~~} = \text{——} F(\kappa) \text{——} + 2 \text{~~~~~} + 16 \text{~~~~~} + \dots$$

donde las líneas o puntos de trazo grueso representan elementos generalizados. Esta ecuación nos da  $Q(\kappa)$  en función de  $G(\kappa)$  y de  $\Gamma(\kappa, \kappa')$ . Habrá que buscar otras dos ecuaciones que nos determinen estas funciones.

Para el caso del vértice generalizado puede procederse en forma análoga



a la anterior. Usando el mismo criterio para determinar los diagramas irreducibles, la ecuación correspondiente es:

$$\bullet = \bullet + 4 \begin{array}{c} \text{diagrama 1} \\ \text{diagrama 2} \end{array} + 4 \begin{array}{c} \text{diagrama 3} \\ \text{diagrama 4} \end{array} + 4 \begin{array}{c} \text{diagrama 5} \\ \text{diagrama 6} \end{array} + 16 \begin{array}{c} \text{diagrama 7} \\ \text{diagrama 8} \end{array} + 16 \begin{array}{c} \text{diagrama 9} \\ \text{diagrama 10} \end{array} + 16 \begin{array}{c} \text{diagrama 11} \\ \text{diagrama 12} \end{array} + \dots$$

+ dos rotaciones de cada diagrama de 5°orden +....

Para el propagador modificado las cosas no son tan sencillas, ya que al aplicar el criterio anterior se cuentan dos veces muchos de los diagramas. Puede observarse que la serie de los diagramas que da el propagado generalizado se puede dividir en dos partes: una, formada por todos los que pueden partirse en dos al cortar una sola línea recta y la otra por todos los que no tienen esta propiedad. Llamaremos  $\Sigma(\vec{k}, \omega) = \Sigma(\kappa)$  a la suma de estos últimos eliminado de cada uno de ellos las rectas de principio y final correspondientes a propagadores simples.  $G(\kappa)$  y  $\Sigma(\kappa)$  están relacionados mediante la ecuación de Dyson, de fácil comprobación

$$G(\vec{k}, \omega) = G_0(\vec{k}, \omega) + G_0(\vec{k}, \omega) \Sigma(\vec{k}, \omega) G(\vec{k}, \omega)$$

que en lenguaje diagramático equivale a:

$$\text{---} = \text{---} + 4 \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

y cuya solución formal es:

$$G(\kappa) = (G_0^{-1}(\kappa) - \Sigma(\kappa))^{-1} = G_0(\kappa) + G_0(\kappa) \Sigma(\kappa) G_0(\kappa) + \dots$$

Diferenciando ahora la ecuación de Dyson con respecto a  $\kappa$  y recordando la definición de  $G_0(\kappa)$ , encontramos la siguiente relación

$$\partial_{\kappa} G^{-1}(\kappa) = \partial_{\kappa} G_0^{-1}(\kappa) - \partial_{\kappa} \Sigma(\kappa) = \gamma_{\mu} - \partial_{\kappa} \Sigma(\kappa)$$

donde  $\gamma_{\mu} = (2v\vec{k}, -i)$ . A partir de aquí queda definido un nuevo operador

$$\Gamma_{\mu}(k, k) = \gamma_{\mu} - \partial_{\kappa} \Sigma(\kappa) = \partial_{\kappa} G^{-1}(\kappa)$$

Considerando que  $\Sigma(\kappa)$  contiene una línea recta que pasa a través de todo el diagrama y eligiendo las adecuadas variables mudas de integración podemos conseguir que la variable  $\kappa$  aparezca solamente en los factores  $G_0(\kappa \pm \kappa')$  asociados a esta línea. Usando adicionalmente el resultado inmediato

$$G_0(\kappa \pm \kappa') = -G_0(\kappa \pm \kappa') \gamma_\mu G_0(\kappa \pm \kappa')$$

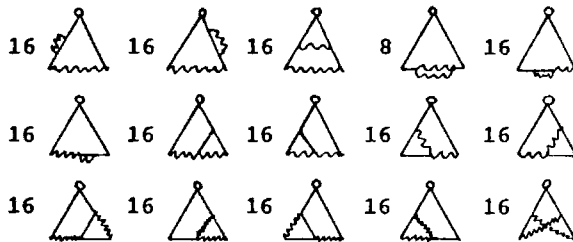
podemos construir diagramas para el nuevo vértice. Para ello, empezando con los diagramas para  $\Sigma(\kappa)$  insertamos un vértice  $\gamma_\mu$  en cada una de las líneas rectas que corren a través del diagrama. Al dibujar los diagramas hemos introducido un nuevo símbolo -o- para representar al vértice  $\gamma_\mu$ .

Orden cero      o

Orden dos



Orden cuatro



Para generalizar el nuevo vértice  $\Gamma_\mu$  a argumentos distintos debemos usar la identidad

$$G_0(\kappa) - G_0(\kappa') = -G_0(\kappa) (\kappa_\mu - \kappa'_\mu) \gamma_\mu (\kappa, \kappa') G_0(\kappa')$$

donde  $\gamma_\mu(\kappa, \kappa') = (v(\vec{k} + \vec{k}'), -i)$ .

Generalizando esta relación para productos de varios factores  $G$  obtenemos





II-43  $G^{-1}(\kappa) - G^{-1}(\kappa') = (\kappa_\mu - \kappa'_\mu) \Gamma_\mu(\kappa, \kappa')$

En esta última ecuación,  $\Gamma_\mu(k, k')$  viene dado por la serie gráfica anterior en la que ahora el círculo  $\circ$  corresponde a  $\gamma_\mu(k, k')$ . Utilizando ahora los criterios expuestos anteriormente para encontrar diagramas irreducibles en las series gráficas para las correlaciones y el vertice puntual  $\bullet$ , y representando a  $\Gamma_\mu(k, k')$  por el símbolo  $\Theta$  podemos escribir

$$\Theta = \circ + 4 \text{ (triangle with wavy line)} + 16 \text{ (triangle with wavy line and dot)} + 16 \text{ (triangle with wavy line and dot)} + 16 \text{ (triangle with wavy line and dot)} + \dots$$


Esta es la cuarta ecuación integral, acoplada a las anteriores, necesaria para el cálculo de las correlaciones.

Por razones de comodidad vamos a escribir a continuación en forma gráfica este sistema de ecuaciones acopladas:

a)  =  F(k)  + 2  + ..

b)  =  + 4  + 4  + .....

II-44

c)  =  + 4 

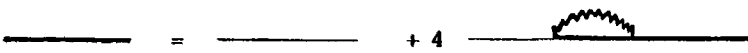
d)  $G^{-1}(k) - G^{-1}(k') = (k - k')_\mu \Gamma_\mu(k, k')$

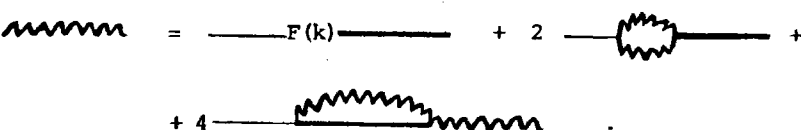
Los momentos estadísticos de orden superior se obtienen de forma análoga a los de segundo orden precedentes.

Mediante estas manipulaciones hemos pasado de estudiar el cierre de una jerarquía a estudiar la convergencia de unas series. El cambio es ventajoso, ya que si para el cierre es preciso conocer los términos de orden

superior para calcular los de menor orden, en una serie sucede lo contrario. Sin embargo queda en pie el problema de la validez de tomar unos términos despreciando otros, ya que, aunque el procedimiento es exacto si se mantienen los términos de todos los órdenes, el cálculo es en este caso imposible. Hay que hacer simplificaciones. No hay nada que garantice la convergencia de la serie desde un punto de vista matemático y el único argumento que induce a pensar en la validez de las truncaciones es que en situaciones análogas de otros campos de la Física, como pueden ser la teoría cuántica de campos y las teorías de estructura de gases densos, estas truncaciones han conducido a resultados muy valiosos.

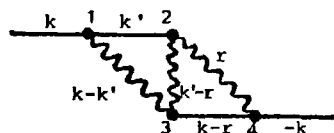
Si ahora procedemos a una comparación con la DIA, tal como ha sido expuesta en el segundo apartado de este capítulo, debemos tener en cuenta que el propagador  $G(k)$  corresponde a la transformada de Fourier en el tiempo de la función de respuesta infinitesimal. Las ecuaciones de la DIA se obtienen al considerar algunas simplificaciones sobre las ecuaciones acopladas II-44. En la ecuación II-44a se toman solamente los dos primeros sumandos. El vértice puntual se toma sin desarrollar, es decir, se prescinde de II-44b, y en vez de utilizar la ecuación II-44c para el segundo vértice, se hace una simplificación de la ecuación de Dyson. Las ecuaciones que corresponden a la DIA en la notación gráfica empleada son:

a) 

II-45 

b)

Observemos que en II-45b los diagramas conservados tienen la característica de que en ellos solo interaccionan tres modos como máximo, por ejemplo, los correspondientes a  $\kappa, \kappa'$  y  $\kappa - \kappa'$ . En el primer término despreciado



el primer vértice representa una interacción entre modos de onda correspondientes a  $k$  (1<sup>er</sup> propagador),  $k'$  (2<sup>o</sup> propagador) y  $(k - k')$  (correlación). El segundo vértice entre modos correspondientes a  $k'$  (2<sup>o</sup> propagador),  $r$  (correlación) y  $(k' - r)$  (correlación). El tercer vértice entre modos correspondientes a  $(k - k')$  (correlación),  $(k' - r)$  (correlación) y  $(k - k' + k' - r) = (k - r)$  (propagador), de forma que el modo correspondiente a  $k' - r$  no interacciona directamente con el modo correspondiente a  $k$ . Kraichnan considera que estas interacciones indirectas deben ser despreciables frente a las directas. Para ello se basa en la hipótesis de Kolmogorov y su comprobación experimental: si la probabilidad de que haya una transferencia de energía entre modos de números de onda muy distantes es pequeña, también se puede considerar que la interacción entre modos de números de onda distantes es despreciable.

Para llegar explícitamente de II-45 a y b, a las ecuaciones de la DIA tal como se han escrito en el segundo apartado, sustituimos los símbolos por las expresiones funcionales correspondientes. Debido a que en vez de la constante de acoplo  $g$  tenemos un tensor  $P_{ijm}(\vec{k})$  en cada vértice, tendremos que multiplicar tanto  $G(\kappa)$  como  $Q(\kappa)$  por el tensor  $(\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)$

$$\text{II-46} \quad G_{ij}(\vec{k}, \omega) = G(\vec{k}, \omega) (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)$$

$$\text{II-47} \quad \Sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) = \Sigma(\vec{k}, \omega) (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)$$

La ecuación de Dyson se escribe tensorialmente como:

$$\text{II-48} \quad G_{ij}(\vec{k}, \omega) = G_{ij}^{(0)}(\vec{k}, \omega) + G_{il}^{(0)}(\vec{k}, \omega) \Sigma_{lm}(\vec{k}, \omega) G_{mj}(\vec{k}, \omega)$$

y teniendo en cuenta II-46 y II-47 podemos reducir II-48 a

$$\text{II-49} \quad G(\vec{k}, \omega) = G^{(0)}(\vec{k}, \omega) + G^{(0)}(\vec{k}, \omega) \Sigma(\vec{k}, \omega) G(\vec{k}, \omega).$$

Según II-45b,  $\Sigma_{ij}(\vec{k}, \omega)$  viene dado por

$$\text{II-50} \quad \Sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) = 4/(2\pi)^4 \int d\omega' \int d^3k' \{ ((-1/2) P_{ilm}(\vec{k}) Q_{lr}(\vec{k}-\vec{k}', \omega-\omega') G_{ms}(\vec{k}', \omega') \\ ((-1/2) P_{srj}(\vec{k})) \}$$

Haciendo  $i=j$  y sumando a índices repetidos:

$$\text{II-51} \quad \Sigma(k, \omega) = (1/2) \Sigma_{ii}(k, \omega) = (-k^2/(2\pi)^4) \int d\omega' \int d^3k' b(\vec{k}, \vec{k}') Q(\vec{k}-\vec{k}', \omega-\omega') G(k', \omega')$$

donde  $b(k, k')$  es un coeficiente dado por :

$$\text{II-52} \quad b(k, k') = (k'/k) \left\{ \frac{\vec{k}' \cdot (\vec{k}-\vec{k}')}{|\vec{k}| |\vec{k}'| (\vec{k}-\vec{k}')^2} + \frac{(\vec{k} \cdot \vec{k}')^3}{\vec{k}^3 \cdot \vec{k}'^3} \right\}$$

Sustituyendo II-49 en II-51 obtenemos una ecuación equivalente a la transformada de Fourier en el tiempo de II-37, la ecuación de la DIA para el tensor de respuesta infinitesimal

$$\text{II-53} \quad (-\omega + vk^2) G(\vec{k}, \omega) = 1 - G(\vec{k}, \omega) \frac{k^2}{(2\pi)^4} \int d\omega' \int d^3k' b(\vec{k}, \vec{k}') Q(\vec{k}-\vec{k}', \omega-\omega') G(\vec{k}', \omega')$$

De igual forma podemos obtener la ecuación análoga a II-39 para las correlaciones

$$\text{II-54} \quad (-\omega + vk^2) Q(\vec{k}, \omega) = F(\vec{k}, \omega) G(-\vec{k}, -\omega) + \frac{k^2}{(2\pi)^4} \int d\omega' \int d^3k' \{ a(\vec{k}, \vec{k}') Q(\vec{k}', \omega') \\ Q(\vec{k}-\vec{k}', \omega-\omega') G(-\vec{k}, -\omega) \} - \\ - \frac{k^2}{(2\pi)^4} \int d\omega' \int d^3k' b(\vec{k}, \vec{k}') Q(\vec{k}-\vec{k}', \omega-\omega') G(\vec{k}', \omega') Q(\vec{k}, \omega)$$

donde  $a(\vec{k}, \vec{k}')$  es la siguiente combinación de los vectores  $\vec{k}$  y  $\vec{k}'$

$$\text{II-54 } a(k, k') = (1/2) \left\{ 1 - 2 \frac{(\vec{k} \cdot \vec{k}')^2 (\vec{k} \cdot (\vec{k} - \vec{k}'))^2}{k^4 k'^2 (k - k')^2} + \frac{(\vec{k} \cdot \vec{k}') (\vec{k} \cdot (\vec{k} - \vec{k}')) (\vec{k}' \cdot (\vec{k} - \vec{k}'))}{k^2 k'^2 (k - k')^2} \right\}$$

Despues de algunas manipulaciones algebraicas, prescindiendo por comodidad de los subíndices tensoriales, las ecuaciones II-37 y II-39 quedan reducidas a las siguientes ecuaciones escalares:

$$\text{II-55 } (d_t + \nu k^2) Q(k, t - t') = 2\pi \int \int_{\Delta} k p r b(k, p, r) dp dr \left\{ \int_{-\infty}^{t'} dt'' G(k, t' - t'') Q(p, t - t'') Q(r, t - t'') - \int_{-\infty}^t dt'' G(p, t - t'') Q(r, t - t'') Q(k, t' - t'') \right\}$$

$$\text{II-56 } (d_t + \nu k^2) G(k, t - t') = -2\pi \int \int_{\Delta} k p r b(k, p, r) dp dr \int_{t'}^t dt'' G(p, t - t'') Q(r, t - t'') G(k, t'' - t') + \delta(t - t')$$

donde el símbolo  $\int \int_{\Delta}$  representa una integración restringida por la condición  $|\vec{k} - \vec{r}| \leq \vec{p} \leq |\vec{k} + \vec{r}|$ . Estas ecuaciones son demasiado complicadas para poder contrastarlas con los resultados experimentales. En este caso habría que comprobar la ley de los 5/3 para el rango inercial y el valor de la constante  $K_0$ . Para ello hay que hacer algunas simplificaciones. Así, teniendo en cuenta la forma encontrada para el tensor viscoso (II-24)

$$G_{in}^{(0)}(\vec{k}, t - t') = P_{in}(\vec{k}) \exp(-\nu k^2 (t - t')) \quad \begin{matrix} t \geq t' \\ = 0 \\ t < t' \end{matrix}$$

se supone para las correlaciones y para la función de respuesta infinitesimal una dependencia en el tiempo de tipo exponencial. Según Edward (26) esta dependencia podría escribirse

$$\text{II-57} \quad G(k, t-t') = H(t) \exp(-\eta(k)(t-t'))$$

donde  $\eta(k)$  es el recíproco del tiempo de respuesta y está definido como:

$$\eta(k) = \left\{ \int_0^\infty d\tau G(k, \tau) \right\}^{-1}. \text{ Para las correlaciones podemos poner}$$

$$\text{II-58} \quad Q(k, t-t') = q(k) \exp(-\eta(k)(t-t'))$$

donde  $q(k) = Q(k, 0)$ .

Tomar II-57 y 58 equivaldría a tomar un conjunto de soluciones particulares en lugar de la general, si y solo si el campo de velocidades tiene una distribución de probabilidad gaussiana y además para diferencias suficientemente grandes del tiempo. Para pequeñas diferencias de tiempo y funciones de distribución arbitrarias, un conjunto de soluciones particulares viene dado por una expresión en la que la dependencia temporal es exponencial cuadrática

$$\text{II-59} \quad G(k, t-t') = H(t) \exp(-(1/2)\sigma^2(k)(t-t')^2)$$

Pese a ello considera Edwards que, como se trata de encontrar una dependencia en los números de onda  $k$  y el valor de una constante, la forma de la dependencia temporal no tiene gran importancia. Kraichnan prefiere utilizar II-59 como expresión mas aproximada aunque los cálculos se compliquen considerablemente. El hecho de que con ambas formas los resultados coincidan parece apoyar los argumentos de Edwards. Utilizando pues para  $G(k, t-t')$  y  $Q(k, t-t')$  las expresiones II-57 y 58 y suponiendo además que  $q(k) = Ak^m$  y  $\eta(k) = Bk^n$ , se obtienen los siguientes resultados:

i) De la ecuación de respuesta infinitesimal una expresión para  $K_0$  (cte. de Kolmogorov) que es función del parámetro  $\lambda$  introducido por el límite superior de una integral ("cut-off"). Según los valores que tome  $\lambda$ ,  $K_0$  varía entre  $K_0=1.47$  y  $K_0=.904$ , siendo el valor medio  $K_0=1.5$  con el 20% de error.



ii) Una ecuación para las correlaciones en la que al intentar obtener la ley de los 5/3 de Kolmogorov aparece una divergencia. La introducción del "cut-off" no es posible en este caso por lo que Leslie propone que sea sustraída y así a partir de del flujo de energía obtiene una dependencia para el espectro  $E(k) = Ak^{-5/3}$ .

En un trabajo reciente de Horner *et al.* (27), que parte de la formulación de Martín, Siggia y Rose (24), se obtiene un valor para la constante  $K_0$  y una dependencia del espectro en  $k$  de cinco tercios mediante un procedimiento matemáticamente correcto. Todos los trabajos en la bibliografía apuntan a que las divergencias de las integrales se producen para bajos números de onda ( $k=0$ ) y son debidas a la localización en estos valores correspondientes al rango de producción de la fuerza estocástica ficticia de agitación que se introduce para la conservación de la energía.

## FLUJOS REALES. ECUACIONES, DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA Y MODELOS SEMIEMPÍRICOS

En la sección anterior se ha visto cómo la suposición de homogeneidad e isotropía simplifica las ecuaciones y permite encontrar con cierta justificación física condiciones de cierre para la jerarquía.

¿En qué situaciones reales pueden considerarse válidas estas hipótesis de turbulencia homogénea e isotrópica? Sólo parecen serlo en un caso: cerca del eje central en la sección transversal del flujo tras la rejilla de un túnel aerodinámico. También, por otro lado, es posible suponer homogeneidad e isotropía locales en aquellos flujos de dimensiones características muy grandes como pueden ser los atmosféricos u oceánicos. Sin embargo, los problemas de interés práctico corresponden a flujos con cizalla, con unas condiciones de contorno que impiden la adopción de las anteriores hipótesis. A continuación estudiaremos las ecuaciones para estos flujos.

### ESTUDIO DE LAS ECUACIONES PARA FLUJOS CON CIZALLA

Deduciremos en este apartado la segunda ecuación de la jerarquía para fluidos incompresibles. En esta deducción se conserva para la presión el símbolo  $p$ , sin sustituirlo por el operador correspondiente, según se hizo en II-4. Puesto que se quiere obtener información sobre el significado físico inmediato de cada término, la utilización de una notación más compacta no es aconsejable.

Sea  $u_i(\vec{x}, t)$  la componente  $i$  del campo de velocidades de un flujo incompresible en el punto  $(\vec{x}, t)$ . Según II-3,  $u_i$  satisface la ecuación:

$$\text{III-1} \quad \partial_t u_i + \partial_{x_m} (u_i u_m) + v \nabla^2 u_i = -\partial_{x_i} p$$

Es posible descomponer los campos  $u_i$  y  $p$  en campos medios a los que se superponen unos campos fluctuantes  $u'_i$  y  $p'$  cuya media realizada en un conjunto de Gibbs es nula:

$$\text{III-2} \quad u_i = U_i + u'_i, \quad p = P + p', \quad \langle u'_i \rangle = 0, \quad \langle p' \rangle = 0$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de transporte de momento obtenemos:

$$\text{III-3} \quad \partial_t u'_i + \partial_{x_m} (U_i U_m + U_i u'_m + u'_i U_m + u'_i u'_m) - v \nabla^2 U_i - v \nabla^2 u'_i = \partial_{x_i} (p' + P)$$

y promediando ahora al conjunto de Gibbs, obtenemos la ecuación de Reynolds:

$$\text{III-4} \quad \partial_{x_m} \langle U_i U_m \rangle + \partial_{x_m} \langle u'_i u'_m \rangle - v \nabla^2 U_i = -\partial_{x_i} P$$

Utilizando esta ecuación y el hecho de que  $\langle U_i U_m \rangle = U_i U_m$  podemos eliminar, de la ecuación III-3 para las fluctuaciones, el término de presión media

$$\text{III-5} \quad \partial_t u'_i + \partial_{x_m} (U_i u'_m + u'_i U_m + u'_i u'_m - \langle u'_i u'_m \rangle) - v \nabla^2 u'_i = -\partial_{x_i} p'$$

Para obtener ahora una ecuación para la nueva cantidad que aparece aquí la correlación entre dos fluctuaciones de velocidad, debemos multiplicar

III-5 por  $u'_j$  y promediar. Para poder realizar el análisis es preciso escribir explícitamente las dependencias en el tiempo y en el espacio

$$\begin{aligned} \text{III-6} \quad & (\partial_t u'_i(\vec{x}, t)) u'_j(\vec{x}', t') + \partial_{x_m} (U_i u'_m + u'_i U_m + u'_i u'_m - \langle u'_i u'_m \rangle)(\vec{x}, t) u'_j(\vec{x}', t') - \\ & - (v \nabla^2 u'_i(\vec{x}, t)) u'_j(\vec{x}', t') = -(\partial_{x_i} p'(\vec{x}, t)) u'_j(\vec{x}', t') \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta una propiedad de la derivación, la ecuación anterior se puede escribir

$$\begin{aligned}
\text{III-7 } & \partial_t (u_i'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t')) + \partial_{x_m} \{ u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') + u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') \\
& + u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') - \langle u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) \rangle u_j'(\vec{x}', t') \} + \\
& + \partial_{x_i} (p'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t')) - (v \nabla^2 u_i'(\vec{x}, t)) u_j'(\vec{x}', t') - \\
& - \{ u_i'(\vec{x}, t) \partial_t u_j'(\vec{x}', t') + (u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) + u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) + u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) - \\
& - \langle u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) \rangle) \partial_{x_m} u_j'(\vec{x}', t') + p'(\vec{x}, t) \partial_{x_i} u_j'(\vec{x}', t') \} = 0
\end{aligned}$$

Hemos visto que para la aplicación de la DIA hay que suponer las correlaciones entre componentes de la velocidad tomadas en distintos puntos del espacio-tiempo, debido a la utilización que esta teoría hace de la función respuesta. Teniendo esto en cuenta,  $(\vec{x}, t) \neq (\vec{x}', t')$  y la segunda expresión entre llaves en III-7 se anula quedando:

$$\begin{aligned}
\text{III-8 } & \partial_t (u_i'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t')) + \partial_{x_m} (u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') + \\
& + u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') + \\
& + u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') - \\
& - \langle u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) \rangle u_j'(\vec{x}', t') = \\
& = -\partial_{x_i} (p'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t')) + (v \nabla^2 u_i'(\vec{x}, t)) u_j'(\vec{x}', t')
\end{aligned}$$

Si se promedia ahora al conjunto de Gibbs se obtiene la ecuación que satisfacen las correlaciones

$$\begin{aligned}
\text{III-9 } & \partial_t \langle u_i'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') \rangle + U_m(\vec{x}, t) \partial_{x_m} \langle u_i'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') \rangle + \\
& + \partial_{x_m} \langle u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') \rangle + \partial_{x_i} \langle p'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') \rangle = \\
& = -\langle u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) \rangle \partial_{x_m} U_j(\vec{x}, t) + v \langle \nabla^2 u_i'(\vec{x}, t) \rangle u_j'(\vec{x}', t')
\end{aligned}$$

Resulta interesante analizar el significado de cada uno de los sumandos de esta ecuación. Tanto el del primero como el del segundo son evidentes: Se trata de una derivada euleriana que nos da la variación de las correlaciones. Podemos interpretar el último sumando como un término disipativo, ya que en él aparece la viscosidad. El significado de los tres restantes términos no es inmediato. Para obtener una idea física sobre la actuación de cada uno de ellos, puede derivarse a partir de III-9 una ecuación para la energía haciendo  $j=i$ . Tomamos como energía del campo de velocidades turbulento  $E_0 = (1/2) \langle u_i'(\vec{x}, t) u_i'(\vec{x}', t') \rangle$ , y la ecuación correspondiente es

$$\text{III-10} \quad \partial_t E_0 + U_m \partial_{x_m} E_0 + \partial_{x_m} ((1/2) \langle u_i' u_i' u_m' \rangle) + \partial_{x_i} \langle p' u_i' \rangle = - \langle u_i' u_m' \rangle \partial_{x_m} U_i + \nu \langle \nabla^2 u_i' \rangle u_i'$$

Es aquí evidente que el quinto sumando  $\langle u_i' u_m' \rangle \partial_{x_m} U_i$  da cuenta de la transferencia de energía del flujo medio a las fluctuaciones, y que esta transferencia depende del gradiente de velocidad media en cada punto. A este término se le suele denominar término de producción. En cuanto a los términos tres y cuatro, al integrarlos a un volumen significativo de cualquier flujo real se anulan. Tomando por ejemplo el flujo objeto de este trabajo, flujo turbulento entre dos placas paralelas, suponiendo que la velocidad media depende solo de la variable  $x_2$ ,  $U = U(x_2)$ , donde  $x_2$  es la dirección normal a ambas placas, que la distancia entre ellas es  $2h$ , y que la dirección del flujo es  $x_1$ , tenemos:

$$\text{III-11} \quad \int_0^{2h} dx_2 \frac{d}{dx_2} ((1/2) \langle u_1' u_1' u_2' \rangle) = (1/2) \{ \langle u_1' u_1' u_2' \rangle(2h) - \langle u_1' u_1' u_2' \rangle(0) \} = 0$$

$$\text{III-12} \quad \int_0^{2h} dx_2 \frac{d}{dx_2} \langle p' u_2' \rangle = \langle p' u_2' \rangle(2h) - \langle p' u_2' \rangle(0) = 0$$

De ello se infiere que los términos tres y cuatro de la ecuación de la energía no tienen nada que ver con la producción o disipación de energía turbulenta. Su único papel puede ser el trasladarla, por lo que se conocen como términos inerciales. Para encontrarles un significado y explicar como actúan hay que estudiar las ecuaciones en casos sencillos y tener en cuenta algunos resultados empíricos. La mayoría de los datos disponibles sobre correlaciones se refieren a correlaciones entre componentes de la velocidad en el mismo punto y tiempo. Esto se debe por un lado a la complejidad de la toma de datos mediante sondas de hilos calientes y por otra a que las únicas teorías que hasta el momento se han ocupado de los flujos reales, los modelos semiempíricos, se ocupan de las correlaciones en el mismo punto y tiempo. A continuación se deduce la ecuación para este tipo de correlaciones y se estudia el significado de cada término. Suponiendo que términos de forma matemática análoga tienen también un significado físico parecido, estas conclusiones se extrapolan para los sumandos correspondientes de la ecuación para las correlaciones en distintos puntos del espacio-tiempo. Para deducir la citada ecuación tomamos III-6, escribimos la ecuación correspondiente a III-5 para  $u_j'(\vec{x}', t')$

$$\begin{aligned} \text{III-13} \quad \partial_t u_j'(\vec{x}', t') + \partial_{x_m'} (u_j'(\vec{x}', t') u_m'(\vec{x}', t') + u_j'(\vec{x}', t') u_m'(\vec{x}', t') + \\ + u_j'(\vec{x}', t') u_m'(\vec{x}', t') + \langle u_j'(\vec{x}', t') u_m'(\vec{x}', t') \rangle) = \\ = -\partial_{x_j'} p'(\vec{x}', t') + \nu \nabla^2 u_j'(\vec{x}', t') , \end{aligned}$$

y multiplicamos por la izquierda por  $u_i'(\vec{x}, t)$  y sumamos la expresión resultante a III-6. Haciendo ahora  $\vec{x}=\vec{x}', t=t'$  nos queda:

$$\begin{aligned}
\text{III-14} \quad & \partial_t (u_i'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}, t)) + \partial_{x_m} \{ u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}, t) + u_i'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) + \\
& + u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}, t) \} + \\
& + \{ v u_i'(\vec{x}, t) \nabla^2 u_j'(\vec{x}, t) + v (\nabla^2 u_i'(\vec{x}, t)) u_j'(\vec{x}, t) \} - \\
& - \partial_{x_m} \{ \langle u_i'(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t) \rangle u_j'(\vec{x}, t) + u_i'(\vec{x}, t) \langle u_m'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}, t) \rangle \} = \\
& = - \{ (\partial_{x_i} p'(\vec{x}, t)) u_j'(\vec{x}, t) + u_i'(\vec{x}, t) \partial_{x_j} p'(\vec{x}, t) \}
\end{aligned}$$

Haciendo un promedio al conjunto de Gibbs se obtiene la ecuación de las correlaciones en el mismo punto y tiempo. Suprimimos la especificación de estos, suponiendo en lo sucesivo que siempre que no se especifique, se trata de correlaciones en iguales punto y tiempo.

$$\begin{aligned}
\text{III-15} \quad & \partial_t \langle u_i' u_j' \rangle + U_m \partial_{x_m} \langle u_i' u_j' \rangle + \langle u_i' u_j' \rangle \partial_{x_m} U_m + \partial_{x_m} \langle u_i' u_j' u_m' \rangle + \\
& + 2v \langle \partial_{x_k} u_i' \partial_{x_k} u_j' \rangle - v \partial_{x_k} \langle u_i' u_j' \rangle = \\
& = - \partial_{x_k} \langle (\delta_{ik} u_j' + \delta_{jk} u_i') p' \rangle + \langle p' (\partial_{x_i} u_j' + \partial_{x_j} u_i') \rangle
\end{aligned}$$

Reordenando y agrupando los términos

$$\begin{aligned}
\text{III-16} \quad & \partial_t \overset{(1)}{\langle u_i' u_j' \rangle} + U_m \partial_{x_m} \overset{(2)}{\langle u_i' u_j' \rangle} + \overset{(3)}{\langle u_i' u_m' \rangle} \partial_{x_m} U_j + \\
& + \partial_{x_m} \{ \langle u_i' u_j' u_m' \rangle + \langle (\delta_{im} u_j' + \delta_{jm} u_i') p' \rangle - v \partial_{x_m} \langle u_i' u_j' \rangle \} = \\
& = - \langle p' (\partial_{x_i} u_j' + \partial_{x_j} u_i') \rangle - 2v \langle \partial_{x_k} u_i' \partial_{x_k} u_j' \rangle
\end{aligned}$$

Los sumandos (1), (2) y (3) junto al sumando (6) han aparecido ya en las correlaciones para puntos y tiempos distintos. Para conseguir una inter-

pretación del papel jugado por los sumandos (4) y (5), pasamos a la ecuación de la energía haciendo  $i=j$

$$\text{III-17} \quad \partial_t \langle u'_i u'_i \rangle + U_m \partial_{x_m} \langle u'_i u'_i \rangle + 2 \langle u'_i u'_i \rangle \partial_{x_m} U_i + \partial_{x_m} \{ \langle (u'_i u'_i + 2p') u'_m \rangle - \nu \partial_{x_m} \langle u'_i u'_i \rangle \} + \\ + 2\nu \langle \partial_{x_k} u'_i \partial_{x_k} u'_i \rangle = 0$$

donde el término (5) ha desaparecido al hacer  $i=j$  debido a que la velocidad media y las fluctuaciones satisfacen la ecuación de continuidad.

Teniendo en cuenta la definición de energía del campo turbulento,

$q^2 = (u'_i u'_i)$  y definiendo la energía turbulenta de disipación como

$$\text{III-18} \quad \epsilon = \langle \partial_{x_k} u'_i \partial_{x_k} u'_i \rangle + \langle \partial_{x_k} u'_i \partial_{x_i} u'_k \rangle$$

teniendo en cuenta la identidad

$$\text{III-19} \quad \langle \partial_{x_k} u'_i \partial_{x_i} u'_k \rangle = \partial_{x_k}^2 \langle u'_i u'_k \rangle$$

y sustituyendo en III-17, nos queda para la energía turbulenta en los mismos punto y tiempo la siguiente ecuación:

$$\text{III-20} \quad \partial_t \langle q^2 \rangle + U_m \partial_{x_m} \langle q^2 \rangle + 2 \langle u'_m u'_i \rangle \partial_{x_m} U_i + \partial_{x_m} \{ \langle (q^2 + 2p') u'_m \rangle - \partial_{x_m} \langle q^2 \rangle \} + 2\epsilon = 0$$

Aparece aquí un sumando sobre el que actúa una derivada primera, donde se mezclan efectos debidos a la presión, viscosidad y triples correlaciones y que por ello recibe el nombre de termino difusivo.

Nos queda por determinar el papel del término (5), aunque el hecho de que no aparezca en la ecuación de la energía nos indica que se trata de un término puramente inercial. Analicemos la función de este término en un flujo muy sencillo. Sea, por ejemplo, un flujo bidimensional como una capa límite turbulenta estacionaria. Llamemos  $x$  a la dirección en que tiene lugar el flujo,  $u$  a la componente de la velocidad en la dirección



$x, v$  la componente en la dirección  $y$ . Supondremos que las fluctuaciones de velocidad  $u'$  y  $v'$  son del mismo orden, y el número de Reynolds suficientemente elevado para que se puedan despreciar todos los términos que vayan multiplicados por  $v$  salvo  $\epsilon$ . En este caso la turbulencia se puede considerar localmente isotrópica y es válida la relación:

$$\text{III-21} \quad 2v \langle \partial_{x_k} u'_i \partial_{x_k} u'_j \rangle = (2/3) \epsilon \delta_{ij}$$

Escribimos a continuación las ecuaciones correspondientes, señalando entre corchetes los términos de menor orden

$$\begin{aligned} \text{III-21a} \quad U \partial_x \langle u'^2 \rangle + V \partial_y \langle u'^2 \rangle + 2 \langle u'v' \rangle \partial_y U + \{ 2 \langle u'^2 \rangle \partial_x U \} - 2 \langle p' \partial_x u' \rangle + \\ + (2/3) \epsilon + \partial_y \langle u'^2 v' \rangle + \{ \partial_x \langle u'^3 \rangle + 2 \langle u'p' \rangle \} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III-21b} \quad U \partial_x \langle v'^2 \rangle + V \partial_y \langle v'^2 \rangle - \{ 2 \langle v'^2 \rangle \partial_x U \} - 2 \langle p' \partial_y v' \rangle + (2/3) \epsilon + \\ \partial_y \langle v'^3 \rangle + 2 \langle v'p' \rangle + \{ \partial_x \langle v'^2 u' \rangle \} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III-21c} \quad U \partial_x \langle u'v' \rangle + V \partial_y \langle u'v' \rangle + \langle v'^2 \rangle \partial_y U - \langle p' (\partial_y u' + \partial_x v') \rangle + \partial_y \langle u'v'^2 \rangle + \langle u'p' \rangle + \\ + \{ \partial_x \langle u'^2 v' \rangle + \langle v'p' \rangle \} = 0 \end{aligned}$$

El término con derivada primera en el tiempo desaparece si se impone la condición de estacionariedad. El término convectivo no es esencial en el establecimiento del equilibrio en el flujo, como lo prueba la existencia de flujos, en canales o tubos largos, en los que este término no aparece. El mismo razonamiento es válido para los términos difusivos, como lo indica el hecho de que se anulan si se integran las ecuaciones en dirección  $y$ . Conservando solo aquellos términos de mayor orden que parecen esenciales, queda

$$\text{III-22a} \quad 2\langle u'v' \rangle \partial_y U - 2\langle p' \partial_x u' \rangle + (2/3)\epsilon = 0$$

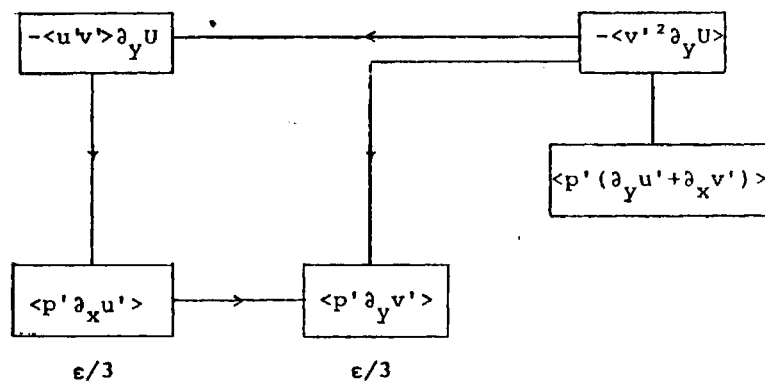
$$\text{III-22b} \quad -2\langle p' \partial_y v' \rangle + (2/3)\epsilon = 0$$

Sea un flujo hipotético en el que la producción es tal que se ve compensada por la disipación (lo que ocurre en primera aproximación en la región logarítmica próxima a la pared en los flujos internos). En este caso encontramos  $\langle p' \partial_x u' \rangle = -(2/3)\epsilon$  mientras que  $\langle p' \partial_y v' \rangle = \epsilon/3$ . Esto nos da una posible interpretación del término correlación de fluctuaciones de presión y gradiente de velocidad fluctuante

i) Las fluctuaciones  $u'$  en la dirección de la velocidad media son las primeras en aparecer y deben su existencia a la interacción entre el stress de Reynolds y el gradiente de la velocidad media. La transferencia de momento de la velocidad media a las fluctuaciones en su misma dirección se efectúa a través del término  $\langle p' \partial_x u' \rangle$ .

ii) Las fluctuaciones  $v'$  son debidas a la transferencia de parte del momento de  $u'$  a  $v'$  que efectúa el término  $\langle p' \partial_y u' \rangle$ . El momento transferido equivale a  $\epsilon/3$ .

Podemos resumir las consideraciones anteriores en el siguiente diagrama de flujo



El flujo medio cede parte de su energía a la fluctuación  $u'$  en su misma dirección. El término  $\langle p' \partial_x u' \rangle$  toma parte de esa energía y la cede a la fluctuación  $v'$  en la dirección transversal al flujo. La energía que queda en  $v'$  y parte de la que queda en  $u'$  pasan de números de onda bajos a números de onda altos donde son disipados. El término de correlación presión fluctuante-gradiente de velocidad fluctuante es un distribuido de energía turbulenta. Se le conoce como termino redistributivo.

Una vez interpretados los terminos de la ecuación para las correlaciones en el mismo punto y tiempo, se extrapolan sus significados a los terminos de las ecuaciones para las correlaciones en puntos y tiempos distintos que presentan igual estructura matemática. Hay que escribir pues III-9 en forma análoga a III-16.

Se desglosa el término en que aparece la presión en III-9 en dos sumandos: uno de ellos es el que llamamos redistributivo y el otro forma parte del término difusivo. Si escribimos  $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{r}$ ,  $\vec{r} = \vec{x}' - \vec{x}$ , puede demostrarse que

$$\text{III-23} \quad \langle (\partial_{x_i} p'(\vec{x})) u'_j(\vec{x}') \rangle = \partial_{x_i} \langle p'(\vec{x}) u'_j(\vec{x}') \rangle - \partial_{r_i} \langle p'(\vec{x}) u'_j(\vec{x}') \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{III-24} \quad \partial_{r_i} \langle p'(\vec{x}) u'_j(\vec{x}') \rangle &= \partial_{r_i} \langle p'(\vec{x}) u'_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = \langle p'(\vec{x}) \partial_{r_i} u'_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = \\ &= \langle p'(\vec{x}) \partial_{(x+r)_i} u'_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = \langle p'(\vec{x}) \partial_{x'_i} u'_j(\vec{x}') \rangle \end{aligned}$$

$$\text{III-25} \quad \langle (\partial_{x_i} p'(\vec{x})) u'_j(\vec{x}') \rangle = \partial_{x_i} \langle p'(\vec{x}) u'_j(\vec{x}') \rangle - \langle p'(\vec{x}) \partial_{x'_i} u'_j(\vec{x}') \rangle$$

Igualmente se desglosa el término que va multiplicado por la viscosidad

$$\begin{aligned} \text{III-26} \quad \langle (\nabla^2 u'_i(\vec{x})) u'_j(\vec{x}') \rangle &= \langle (\partial_{x_k}^2 u'_i(\vec{x})) u'_j(\vec{x}') \rangle = \partial_{x_k}^2 \langle u'_i(\vec{x}) u'_j(\vec{x}') \rangle - 2 \partial_{x_k}^2 \langle u'_i(\vec{x}) u'_j(\vec{x}') \rangle \\ &= \partial_{x_k}^2 \langle u'_i(\vec{x}) u'_j(\vec{x}') \rangle - 2 \langle \partial_{x_k} u'_i(\vec{x}) \partial_{x_k} u'_j(\vec{x}') \rangle \end{aligned}$$

Para demostrar esto último se sigue un camino análogo al tomado para desglosar el término de presión

$$\text{III-27} \quad \partial_{x_k} \langle u_i'(\vec{x}) u_j'(\vec{x}') \rangle = \partial_{x_k} \langle u_i'(\vec{x}) u_j'(\vec{x}') \rangle + \partial_{r_k} \langle u_i'(\vec{x}) u_j'(\vec{x}') \rangle \partial_{x_k} r_k$$

y teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} \text{III-28} \quad \partial_{x_k} \langle u_i'(\vec{x}) u_j'(\vec{x}') \rangle &= \partial_{(x_k' - x_k)} \langle u_i'(\vec{x}) u_j'(\vec{x}') \rangle \partial_{x_k'} (\vec{x} - \vec{x}') = \\ &= \partial_{r_k} \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle \end{aligned}$$

Considerando que  $u(x)$  no depende de  $x'$ , ni a su vez  $u(x')$  depende de  $x$ , podemos poner:

$$\begin{aligned} \text{III-29} \quad \partial_x \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle &= \langle \partial_x (u'(x) u'(x')) \rangle = \langle (\partial_x u'(x)) u'(x') \rangle \\ \partial_{x'} \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle &= \langle \partial_{x'} (u'(x) u'(x')) \rangle = \langle u'(x) \partial_{x'} u'(x') \rangle \end{aligned}$$

Utilizando todas estas relaciones escribimos

$$\begin{aligned} \text{III-30} \quad \langle \partial_{x_k}^2 u_i'(x) u_j'(x') \rangle &= \partial_{x_k}^2 \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle = \partial_{x_k} (\partial_{x_k} \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle) = \\ &= \partial_{x_k} (\partial_{x_k} \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle) - \partial_{x_k'} (\partial_{x_k} \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle) = \\ &= \partial_{x_k} (\partial_{x_k} \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle) - \partial_{x_k} (\partial_{x_k'} \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle) = \\ &= \partial_{x_k} (\partial_{x_k} \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle) - \partial_{x_k} (\partial_{x_k'} \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle) = \\ &= \partial_{x_k}^2 \langle u_i'(x) u_j'(x') \rangle - 2 \langle \partial_{x_k} u_i'(x) \partial_{x_k'} u_j'(x') \rangle \end{aligned}$$

Se puede escribir la ecuación de las correlaciones entre dos componentes de la velocidad en puntos y tiempos distintos de forma análoga a la de las correlaciones para puntos y tiempos iguales:

$$\begin{aligned} \text{III-31} \quad \partial_t \langle u_i'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') \rangle &+ U_m(\vec{x}, t) \partial_{x_m} \langle u_i'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x}', t') \rangle + \\ &+ \langle u_i'(x, t) u_m'(x', t') \rangle \partial_{x_m} U_j(x, t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \partial_{x_m} \langle u'_i(\vec{x}) u'_j(\vec{x}, t) u'_m(\vec{x}', t') \rangle + \langle p'_k(\vec{x}, t) \{ \delta_{ik} u'_j(\vec{x}', t') + \delta_{jk} u'_i(\vec{x}', t') \} \rangle - \\
& - v \partial_{x_k} \langle u'_i(\vec{x}, t) u'_j(\vec{x}', t') \rangle - \langle p'(\vec{x}, t) (\partial_{x_i} u'(\vec{x}', t')) \rangle + \\
& + 2v \langle \partial_{x_m} u'_i(\vec{x}, t) \partial_{x_k} u'(\vec{x}', t') \rangle = 0
\end{aligned}$$

En esta ecuación hay un sumando que tiene la misma forma que el término que antes llamábamos de redistribución, pero mientras que las fluctuaciones de presión se producen en un punto, las fluctuaciones de velocidad a las que se transfiere energía están en otro. Pero como la estructura es análoga suponemos que el análisis anterior es también válido en este caso. Debido a la importancia que tiene el término de redistribución para el problema objeto de este trabajo, intentaremos realizar un análisis más profundo. Sabíamos por (4) que la presión en un fluido incompresible en movimiento satisface la ecuación

$$\nabla^2 p(\vec{x}) = -\partial_{x_i}^2 (u_i(\vec{x}) u_m(\vec{x})).$$

Descomponiendo el campo de velocidades en un campo medio al que se superpone una fluctuación,  $u_i = U_i + u'_i$

$$\text{III-32} \quad \nabla^2 p(x) = -\partial_{x_m} U_i \partial_{x_i} U_m - 2\partial_{x_m} U_i \partial_{x_i} u'_m - \partial_{x_i}^2 (u'_i u'_m)$$

y promediando al conjunto de Gibbs

$$\text{III-33} \quad \nabla^2 p = -\partial_{x_m} U_i \partial_{x_i} U_m - \partial_{x_i}^2 \langle u'_i u'_m \rangle$$

Sustrayendo esta expresión de la anterior aparece una ecuación para la fluctuaciones de presión  $p'$ :

$$\text{III-34} \quad \nabla^2 p' = -2\partial_{x_m} u'_i \partial_{x_i} u'_m - \partial_{x_i}^2 u'_i u'_m + \partial_{x_i}^2 \langle u'_i u'_m \rangle$$

Se trata de una ecuación diferencial de tipo elíptico. Si se suponen

conocidas las fluctuaciones de velocidad y las correlaciones entre ellas, se convierte en una ecuación de Poisson. A partir de III-34, aplicando el teorema de Green se puede obtener una expresión integral:

$$\text{III-35} \quad \int_V dV(x') (v \nabla^2 p' - p' \nabla^2 v) = \int_S ds(x') (v \nabla p' - p' \nabla v)$$

donde la integración se realiza a funciones de  $\vec{x}'$ , siendo  $\vec{x}$  el punto en el que se quiere conocer la fluctuación de presión,  $V(x')$  el volumen a que se integra y  $S$  la superficie de la frontera de ese volumen. Tomamos como función de Green  $v = 1/r$ ,  $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$ . Si el punto  $\vec{x}$  se halla lejos del contorno del fluido, podemos escribir:

$$\text{III-36} \quad \int_V dV(x') (1/r) \nabla^2 p' - \int_S dS(x') (1/r) \partial_n p' + \int_S dS(x') \partial_n (1/r) p' = -4\pi p'(x)$$

y sustituyendo  $\nabla^2 p'$  por su expresión dada por III-34 obtenemos

$$\text{III-37} \quad p' = (1/4\pi) \int_V d\vec{x}' (1/|\vec{x} - \vec{x}'|) (2\partial_{x'_j} u_i \partial_{x'_i} u'_j + \partial_{x'_i x'_j}^2 (u'_i u'_j) - \partial_{x'_i x'_j}^2 \langle u'_i u'_j \rangle)$$

Si por el contrario el punto se halla en el contorno, la integración ha de realizarse solamente a media esfera. Repitiendo el procedimiento anterior, obtenemos para  $p'_C(x)$ , fluctuación de presión en el punto  $x$  del contorno:

$$\begin{aligned} \text{III-38} \quad p'_C(x) &= (1/2\pi) \int_{S_C} dS(x') / (|\vec{x} - \vec{x}'|) (\partial_n p'(\vec{x}')) = \\ &= (1/2\pi) \int_V d\vec{x}' / (|\vec{x} - \vec{x}'|) (2\partial_{x'_j} u_i \partial_{x'_i} u'_j + \partial_{x'_i x'_j}^2 (u'_i u'_j) - \partial_{x'_i x'_j}^2 \langle u'_i u'_j \rangle) \end{aligned}$$

donde  $S_C$  es la superficie del contorno. Estas expresiones muestran la dependencia de  $p'(\vec{x})$  del flujo medio, de las fluctuaciones de velocidad y de las correlaciones entre estas. Por ello escribimos  $p'$  como

$$\text{III-40} \quad p'(\vec{x}) = p'_M(\vec{x}) + p'_T(\vec{x})$$

donde  $p'_M$  es la parte de la fluctuación de presión debida a la interacción entre los gradientes de velocidad media y de la fluctuación de velocidad, mientras que  $p'_T$  representa la parte de fluctuación de presión debida a la interacción entre fluctuaciones de velocidad. A consecuencia de este desdoblamiento se desglosarán también los términos de distribución y de difusión (que por razones de sencillez de notación suponemos en los mismos puntos del espacio y tiempo):

$$\text{III-41} \quad \langle p' \partial_{x_j} u'_i \rangle = \langle p'_M \partial_{x_j} u'_i \rangle + \langle p'_T \partial_{x_j} u'_i \rangle$$

$$\text{III-42} \quad \langle p' u'_i \rangle = \langle p'_M u'_i \rangle + \langle p'_T u'_i \rangle$$

y sustituyendo  $p'_M$  por la expresión correspondiente tenemos para el término de difusión

$$\text{III-43} \quad \langle p'_M u' \rangle = (1/2\pi) \int \frac{d\vec{r}}{V(\vec{r})} (|\vec{r}|) (\partial_{r_1} u_k(\vec{x}+\vec{r}) \partial_{r_k} \langle u'_i(\vec{x}+\vec{r}) u'_j(\vec{x}) \rangle)$$

y para el de redistribución

$$\begin{aligned} \text{III-44} \quad \langle p'_M \partial_{x_j} u'_i \rangle = & -(1/2\pi) \int \frac{d\vec{r}}{V(\vec{r})} \partial_{r_1} u_k(\vec{x}+\vec{r}) \partial_{r_j r_k}^2 \langle u'_i(\vec{x}+\vec{r}) u'_j(\vec{x}) \rangle \frac{d\vec{r}}{|\vec{r}|} + \\ & + (1/2\pi) \int \frac{d\vec{r}}{V(\vec{r})} \partial_{r_1} u_k(\vec{x}+\vec{r}) \partial_{x_j r_k}^2 \langle u'_i(\vec{x}+\vec{r}) u'_1(\vec{x}) \rangle \frac{d\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{aligned}$$

Interesa aquí hacer una estimación de la parte de la fluctuación de presión debida al flujo medio y de la debida al acoplo entre fluctuaciones de la velocidad. Parece lógico pensar que  $p'_M$  será la parte más importante, debido al papel que hemos asignado al término redistribuidor. Para hacer una primera estimación se elige un flujo sencillo, con una variación de velocidad media que es significativa solo en una dirección,  $\partial_x U \ll \partial_y U$ , y además suponemos que es válido el desarrollo en serie de

Taylor

$$\text{III-45} \quad \partial_{r_y} U(\vec{x} + r_y) = \partial_y U(\vec{x}) + r_y \partial_y^2 U(\vec{x}) + r_y \partial_y^3 U(\vec{x}) + \dots$$

Se supone además una cierta isotropía en las fluctuaciones de velocidad, es decir, que son del mismo orden de magnitud las distintas componentes. Si se recuerda la definición de energía turbulenta  $q$ , nos queda para la parte del término de redistribución debida al flujo medio

$$\text{III-46} \quad \langle p'_M (\partial_y u' + \partial_x v') \rangle = (1/5) \langle q^2 \rangle \partial_y U + (1/45) \langle q^2 \rangle \partial_y^3 U \int_0^\infty dr \, r f(r) + \dots$$

y para la parte correspondiente al término difusivo

$$\text{III-47} \quad \langle p'_M u' \rangle = (2/15) \langle q^2 \rangle \partial_y^2 U \int_0^\infty dr \, r f(r) + \dots$$

donde  $f(r)$  es una longitud de correlación y la integral corresponde a su primer momento.

Si la producción viene dada por  $\langle v'^2 \rangle \partial_y U$  donde  $\langle v'^2 \rangle = \langle q^2 \rangle / 2$ , entonces

i) solo el primer sumando del término de redistribución  $\langle p'_M (\partial_y u' + \partial_x v') \rangle$  representa el 40% de toda la producción.

ii) el segundo sumando del término de redistribución es comparable al primero del término difusivo.

#### CLASIFICACIÓN DE LOS FLUJOS REALES SEGÚN LAS CONDICIONES DE CONTORNO

En el apartado anterior se han estudiado un conjunto de ecuaciones, derivadas de las de Navier-Stokes, para el movimiento turbulento de flujos reales. Pero dicho movimiento no estará descrito si no se especifican las condiciones de contorno. Recordemos que fijar unas condi-



ciones de contorno u otras puede no solo hacer variar la forma de las soluciones sino incluso hacer que estas existan o no. Al fijar unas condiciones de contorno tenemos que particularizar y estudiar los distintos tipos de flujo posibles. Las condiciones de contorno pueden ser fijas o libres. El ejemplo mas característico de una condición de contorno fija es una pared y de una condición de contorno libre el caso de un chorro. Hay una serie de flujos conocidos como 'sencillos'. Son flujos que aunque reales pueden ser idealizados. Por ejemplo, en varios de ellos se puede aceptar la bidimensionalidad. Estos son los flujos que en muchos casos sirven para ajustar los parámetros de los modelos semiempíricos. De acuerdo con el tipo de condición de contorno que se impone se clasifican en flujos con:

i) Condiciones de contorno fijas :

1) Flujo entre dos placas infinitas paralelas siendo la distancia entre placas  $2h$ . El caso mas sencillo es aquel en que las paredes son lisas, aun cuando tambien se ha estudiado el caso de que una de las paredes sea rugosa. El movimiento se produce por un gradiente de presión

2) Flujo entre dos placas semiinfinitas paralelas siendo la distancia entre placas  $2h$ . El movimiento se produce desplazando una de las placas respecto a la otra con velocidad constante.

3) Flujo en un tubo de longitud infinita.

ii) Condiciones de contorno libres

1) Chorro plano: Un fluido es expulsado a través de una rendija con velocidad constante a un espacio exterior lleno del mismo fluido o de otro en reposo. La longitud de la rendija es mucho mayor que su anchura y por lo tanto puede ser considerada unidimensional.

2) Chorro circular: Se trata de un flujo análogo al anterior, pero ahora, al ser el orificio de salida un círculo, no es posible la consideración de unidimensionalidad.

iii) Condiciones de contorno mixtas.

1) Capa límite. Un contorno fijo y el otro libre. Es el tipo de turbulencia que aparece con mas frecuencia y por lo tanto al que se ha dedicado mayor interés. Se puede originar de formas muy diversas, por ejemplo: Mezcla en un canal de dos fluidos con distintas velocidades, capa límite tras un objeto plano en el interior de un fluido, capa límite tras un cuerpo de revolución en el interior de un fluido.

2) Chorro de pared: Se trata de un chorro que se mueve sobre una pared teniendo una parte de su contorno en contacto con otro fluido en reposo o moviéndose a una velocidad distinta.

Hay otros tipos de flujo turbulento en los que la turbulencia tiene un origen no mecánico, p.ej. térmico. Los mas sencillos de entre ellos son la convección libre turbulenta y la convección turbulenta entre dos placas. La existencia de una ecuación adicional para la temperatura complica considerablemente los cálculos. Por ello los modelos semiempíricos no utilizan este tipo de flujos para sus ajustes (exceptuando, claro esta, aquellos modelos creados específicamente para ellos). Entre todos estos flujos se admite en la bibliografía que los mas simples son el flujo entre placas infinitas (flujo en un canal) y el flujo en tubo cilíndrico. Esto se debe en parte a la sencillez de la condición de pared. Los cálculos objeto de este trabajo se han realizado sobre un problema de flujo en un canal.

### UN EJEMPLO DE FLUJO INTERNO: FLUJO EN UN CANAL

El canal consiste en dos placas paralelas infinitas en reposo una con respecto a la otra. Se toma como distancia entre las placas el valor  $2h$ . El fluido es incompresible. El sistema de referencia es el cartesiano (el flujo se considera bidimensional) en reposo respecto de las placas. Se toma como dirección del flujo  $x_1$  mientras que  $x_2$  es transversal al canal. El origen se encuentra sobre la placa inferior. El movimiento se debe a un gradiente de presión en la dirección  $x_1$ . Para que el flujo sea estacionario, este gradiente,  $|d_{x_1} P|$ , debe mantenerse constante en el tiempo. Si las dos paredes son iguales existe una simetría especular respecto al plano  $x_2 = h$ . Esta simetría se rompe si una de las paredes pasa a ser rugosa mientras que la otra se mantiene lisa. Si la rugosidad es suficientemente importante aparece un nuevo gradiente no nulo de la presión en dirección  $x_2$ ,  $|d_{x_2} P|$ , que da lugar a una recirculación del fluido en la dirección  $x_2$ .

Nos ocuparemos aquí del canal de paredes lisas, aunque se haga alguna referencia al otro caso. El movimiento del fluido se suele caracterizar por una velocidad definida como

$$\text{III-48} \quad U_m \doteq (1/2h) \int_0^{2h} U(x_2) dx_2$$

y el número de Reynolds del canal vendrá dado en función de esa velocidad como  $Re = 4U_m h/\nu$ . Cuando el régimen es laminar este tipo de flujo se conoce como de Poiseuille plano. Para que se produzca el paso al régimen turbulento el valor de  $Re$  deberá ser superior a un valor crítico. Este número de Reynolds crítico dependerá de las condiciones en

que se realizan los experimentos. Existe un valor mínimo de aproximadamente  $2 \times 10^3$  y un máximo valor conseguido en el laboratorio de hasta  $10^6$ . La mayor parte de las medidas experimentales con números de Reynolds más altos se han efectuado en problemas geofísicos alrededor de un valor de  $10^7$ .

Este flujo está definido por el gradiente de presión media  $|d_{x_1} p|$  y el tensor de rozamiento viscoso de las paredes  $\tau_s$ . La velocidad media  $U_1$  es solamente función de  $x_2$ ,  $U = U(x_2)$ . Se puede demostrar que en un flujo de estas características el gradiente de la velocidad media se mantendrá constante. En efecto, la ecuación de Reynolds en este caso

$$\begin{aligned} \text{III-49} \quad \partial_{x_2} \langle u_1 u_2 \rangle - \nu \partial_{x_2}^2 U_1 &= -\partial_{x_1} p \\ \partial_{x_2} \langle u_2^2 \rangle &= -\partial_{x_2} p \end{aligned}$$

integrando la segunda ecuación

$$\text{III-50} \quad p(x_1, x_2) = p(x_1, 0) - \langle u_2^2 \rangle x_2.$$

Si en esta ecuación hacemos  $x_2 = 0$  y  $x_2 = 2h$ , concluimos  $|d_{x_1} p| = \text{cte.}$

En la primera ecuación de III-49, los dos términos del primer miembro cumplen la misma función y por ello pueden ser englobados en uno solo.

Si llamamos  $\tau_v = \nu \partial_{x_2} U$  y  $\tau_R = \langle u_1 u_2 \rangle$  y definimos  $\tau = \tau_v + \tau_R$ , podemos escribir esta ecuación como

$$\text{III-51} \quad d_{x_2} \tau = -|d_{x_1} p|.$$

En la pared la velocidad debe anularse. Por ello tanto los campos de velocidad media como las fluctuaciones se hacen cero para  $x_2=0$  y  $x_2=2h$ . Esto implica que en ambas paredes se anula el tensor de stress de Reynolds y se cumple

$$\text{III-52} \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} \tau = \tau_s = \left. d_{x_2}^2 U(x_2) \right|_{x_2=0}$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow 2h} \tau = \tau_s = \left. v d_{x_2}^2 U(x_2) \right|_{x_2=2h}$$

Como se ha observado que  $|d_{x_1} p| = \text{cte}$ , es evidente que la variación de  $\tau$  será lineal

$$\text{III-53} \quad |\tau| = \tau_s - (\tau_s/h)x_2$$

y de aquí podemos deducir una ecuación para el gradiente de presión

$$\text{III-54} \quad |d_{x_1} p| = \tau_s/h.$$

Usualmente las medidas no se refieren al gradiente sino a un factor de fricción conocido como de Pfanning,  $f$ , definido como

$$\text{III-55} \quad s |d_{x_1} p| = Pe f (1/2) U_m^2$$

donde  $s$  es el área de una sección transversal del flujo y  $Pe$  su perímetro.

A continuación se analiza el flujo de acuerdo con la variación de su velocidad media  $U(x_2)$ . Se pueden distinguir tres regiones:

1.- La región adyacente a la pared. En ella la velocidad media puede depender únicamente de las condiciones locales. Teniendo en cuenta la condición de contorno en la pared

$$\text{III-56} \quad \tau_s = -\langle u_1 u_2 \rangle + v \partial_{x_2} U$$

puede definirse una velocidad de fricción  $u_f = \tau_s^{1/2}$ . En esta región el papel de la viscosidad es muy importante ya que debido a ella no hay deslizamiento del fluido sobre la pared. La velocidad media en esta región dependerá de  $\hat{x}_2$ , distancia a la pared, de la viscosidad  $v$  y de

la velocidad de fricción,  $u_f$ . Combinando estas variables para obtener una expresión dimensionalmente correcta resulta

$$\text{III-57} \quad U(x_2) = u_f f(y^+) ; y^+ = u_f \hat{x}_2 / \nu$$

$\hat{x}_2 = x_2$  cerca de la pared inferior y  $\hat{x}_2 = 2h - x_2$  en la pared superior. Esta expresión es siempre válida en la proximidad de la pared, independientemente del tipo de flujo de que se trate. Se dice por ello que es un perfil universal de velocidad. Las medidas dan una aproximación buena a esta ley, siempre que la distancia adimensionalizada  $y_c = \hat{x}_2/h$  sea pequeña, pues solo en este caso se puede considerar  $\tau = \tau_s = \text{cte.}$

2.- Región central del canal o "core". En esta zona la dimensión característica es la semianchura  $h$ , por lo que la variable apropiada será  $y_c = \hat{x}_2/h$ . Como la viscosidad no desempeña aquí ningún papel especial, supondremos que la velocidad media no depende en esta zona de ella. Para obtener mayor información estudiamos la ecuación para la energía turbulenta en esta región

$$\text{III-58} \quad -\langle u_1 u_2 \rangle \frac{d}{dx_2} U = \epsilon + \frac{d}{dx_2} (\langle u_2 p \rangle + (1/2) \langle q^2 u_2 \rangle).$$

Como en la región viscosa se eligió  $u_f$  como referencia de orden de magnitud para  $\tau$ , tomaremos ahora la misma. En el segundo miembro de III-58 el segundo término debe ser del orden de  $u_f/h$ , lo que indica que  $\frac{d}{dx_2} U = u_f/h$  y por lo tanto escribimos

$$\text{III-59} \quad \frac{d}{dx_2} U = (u_f/h) \frac{d}{dy_c} g$$

donde  $g$  es una función desconocida cuyo gradiente es del orden de la unidad. Integrando al centro del canal

$$\text{III-60} \quad U - U(h) = u_f g(y_c)$$

Este tipo de dependencia recibe el nombre de ley deficitaria de velocidades. Aunque  $g(y_c)$  es también una función universal, su rango de validez no es tan extenso como el de  $f(y^+)$ , puesto que mientras esta es válida para cualquier tipo de flujo, aquella solo lo es para el canal.

3.- Una región de transición entre las dos anteriores, conocida como capa inercial o flujo logarítmico. Es una zona intermedia en la que se mantienen algunas de las características del flujo próximo a la pared, como la constancia del tensor de stress (34). Sin embargo el efecto de la viscosidad ya no es del mismo orden. Por lo tanto ésta no determina la escala característica de la zona, así como tampoco lo hace  $h$  por ser demasiado grande. La única dimensión característica que encontramos es la propia distancia  $\hat{x}_2$  a la pared. Para los órdenes de magnitud de las velocidades tomaremos como antes  $u_f$ , la velocidad de fricción. El gradiente de la velocidad media  $U_1$  tendrá la forma

$$\text{III-61} \quad \frac{d}{dx_2} U = \text{cte. } u_f / x_2$$

Al integrar esta expresión a una zona con un  $x_2$  tal que  $x_2 u_f / \nu$  sea grande y  $x_2 / h$  pequeño, encontramos un perfil logarítmico de velocidad. La ley anterior puede ser deducida de una forma más rigurosa, solapando asintóticamente los perfiles de velocidad correspondientes a las otras dos regiones.

El gradiente de velocidad media en la región adyacente a la pared será

$$\text{III-62} \quad \frac{d}{dx_2} U = \frac{\partial}{\partial y^+} U \frac{d}{dx_2} y^+ = (u_f^2 / \nu) \frac{d}{dy^+} f$$

mientras que en la región central del canal

$$\text{III-63} \quad \frac{d}{dx_2} U = \frac{\partial}{\partial y_c} U \frac{d}{dx_2} y_c = (u_f / h) \frac{d}{dy_c} g$$

Para que ambas funciones se solapen los gradientes deben de ser iguales

$$\text{III-64} \quad (u_f/v)d_{y+f} = (1/h)d_{y_c} g$$

multiplicando esta expresión por  $x_2/u_f$  nos queda:

$$\text{III-65} \quad y^+ d_{y+f} = y_c d_{y_c} g = \text{cte.}$$

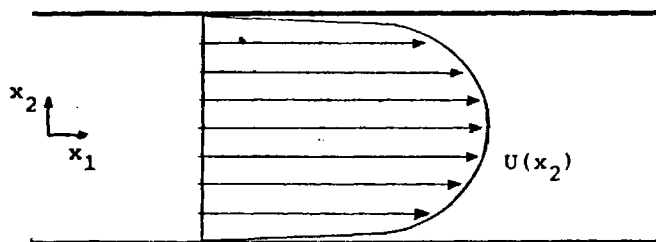
ya que  $f$  es solo función de  $y^+$  y  $g$  es solo función de  $y_c$ . Integrando resulta

$$\begin{aligned} \text{III-67} \quad f(y^+) &\rightarrow A + B \ln y^+ + O(1/y^+) & y^+ \rightarrow \infty \\ g(y_c) &\rightarrow J + I \ln y_c + O(y_c) & y_c \rightarrow 0 \end{aligned}$$

La obtención de este perfil logarítmico utilizando procedimientos analíticos es uno de los mayores logros de la teoría de la turbulencia.

Con herramientas analíticas de naturaleza muy general se puede obtener un resultado específico aunque las ecuaciones de movimiento para esta región no puedan resolverse. La resolución de estas es una piedra de toque para cualquier teoría que se ocupe de la turbulencia y por ello a esta capa inercial se la considera un tipo específico de flujo.

El perfil que resulta de este análisis de las ecuaciones combinado con consideraciones dimensionales es:



#### Estudio de la energía turbulenta del flujo

Recordando que el tensor de esfuerzos es  $\tau = \tau_R + \tau_v$ , donde  $\tau_R = \langle u_1' u_2' \rangle$



y  $\tau_v = \partial_{x_2} U$  y teniendo en cuenta la ley que hemos deducido para la velocidad media del flujo próximo a la pared, se obtiene para el tensor de Reynolds la siguiente expresión

$$\text{III-68} \quad \tau_R = u_f^2 (1 - d_{y^+} f(y^+)) (1 - y^+/h^+)$$

donde  $h^+ = hu_f/\nu = (1/2) \text{Re} \sqrt{f/2}$ . Al crecer  $y^+$  se puede suponer que la expresión correspondiente a  $f(y^+)$  es la deducida en III-67. Sustituyendo en III-68

$$\text{III-69} \quad \tau_R = u_f^2 (1 + B/y^+) (1 + y^+/h^+)$$

Si  $y^+/h^+$  es pequeño (condición necesaria para permanecer en la capa inercial) y  $B/y^+$  lo es también, la expresión anterior nos dice que el tensor de Reynolds es constante e igual a  $u_f^2$ . Si ésto se verifica, en la región logarítmica las intensidades turbulentas deben ser iguales a una constante que multiplica a  $u_f^2$

$$\text{III-70} \quad \langle u_1'^2 \rangle = D_1 u_f^2, \quad \langle u_f'^2 \rangle = D_2 u_f^2, \quad \langle u_3'^2 \rangle = D_3 u_f^2.$$

Esto nos sugiere que en la región logarítmica, la producción de energía turbulenta se encuentra equilibrada por la disipación y la difusión. En ella tendrá lugar principalmente un transporte y redistribución de la energía.

En esta capa, según los criterios de escala y similitud maneja- dos antes, la producción  $\langle u_1' u_2' \rangle \partial_{x_2} U$  es del orden de  $B u_f^2 / y^+$ . Se puede demostrar que la máxima producción corresponde a  $y^+ = 12$ , y debe ser del orden de  $B u_f^2 / 4\nu$ . Los valores típicos de la energía turbulenta para el centro del canal se han calculado para el caso tridimensional y resulta ser  $\langle u_1'^2 \rangle = u_f^2$ ,  $\langle u_2'^2 \rangle = \langle u_3'^2 \rangle = (1/2) u_f^2$ . Para el caso del canal simétrico

(ambas paredes lisas)  $\tau_R$  y  $d_{x_2} U$  se anulan en el plano central. En las proximidades de éste, son del orden de  $x_2 - h$ , mientras que se calcula que la disipación es sesenta veces mayor en el centro del canal que cerca de las paredes.

#### Medidas y resultados experimentales

Experimentalmente no es posible comprobar la ley logarítmica en la proximidad de la pared de forma definitiva. Ello es debido a que las mejores medidas disponibles tienen un error superior al 20%. Sin embargo, las medidas realizadas en la capa inercial para distintos flujos se ajustan bastante bien a esta ley, incluso cuando el tensor de esfuerzos es solo aproximadamente cte., como ocurre por ejemplo con el flujo en tuberías y capas límites con gradientes de presión positivos o negativos.

Las primeras medidas del perfil de velocidad media en un canal fueron realizadas por Prandtl (28) empleando tubos de Pitot. Medidas posteriores se hicieron utilizando hilos calientes en forma de sonda. La comprobación de la ley logarítmica es hoy un paso obligado en la puesta a punto de experimentos con flujos internos. Recientemente han aparecido datos de medidas efectuadas mediante laser (29) pero el método se halla todavía en fase de puesta a punto y parece aventurado sacar conclusiones de estos datos. Las medidas disponibles de las correlaciones en el canal no son por desgracia tan numerosas. El primer trabajo en que aparecían dichas medidas fué publicado por Laufer (30). Un trabajo de medida muy sistemático, que vamos a tomar como referencia se debe a Comte-Bellot (31) y fué realizado para un canal simétrico. Hanjalic y Launder (32) midieron también las correlaciones, pero en un canal asimétrico, con una pared lisa y la otra rugosa.

Las primeras medidas sistemáticas y detalladas de un flujo turbulento interno fueron hechas en un tubo mediante un sistema de sondas de hilos calientes por Laufer (1954). Para un mismo punto y tiempo midió el tensor de Reynolds  $\langle u'_1 u'_2 \rangle$  encontrando una buena coincidencia con la expresión que se ha deducido anteriormente. También midió las intensidades turbulentas  $\langle u'^2_1 \rangle, \langle u'^2_2 \rangle, \langle u'^2_3 \rangle$  y de ellas dedujo la variación de la energía turbulenta a lo largo del tubo. Finalmente examinó la magnitud de cada término en la ecuación de balance de energía III+10

$$\begin{aligned}
 & \overset{(1)}{\partial_t E_0} + \overset{(2)}{U_m \partial_{x_m} E_0} + \overset{(3)}{\partial_{x_m} ((1/2) \langle u'_i u'_j u'_m \rangle)} + \overset{(4)}{\partial_{x_i} \langle p u'_i \rangle} = \\
 & \qquad \qquad \qquad = - \underset{(5)}{\langle u'_i u'_m \rangle \partial_{x_m} U_j} + \underset{(6)}{\nu (u'_i \nabla^2 u'_i)}
 \end{aligned}$$

Los términos (1) y (2) son nulos para un flujo turbulento completamente desarrollado y estacionario. El término de producción (5) se puede medir con bastante exactitud, pero el error en el término disipativo (6) es muy grande, debido a que los vórtices disipativos son pequeños. El término (3) se obtiene con muy poca exactitud en algunas zonas, por ejemplo en la inercial en donde es muy pequeño. Hasta el momento no existen medidas del término inercial (4) en este tipo de flujos, debido a que aún no se ha diseñado ningún instrumento adecuado que responda de forma suficientemente rápida a las fluctuaciones de presión en esta escala..

Las fluctuaciones en la atmósfera terrestre son mucho mayores y más lentas que en este tipo de experimentos de laboratorio. Existen diseños de sensores que son capaces de medir las fluctuaciones de presión y de velocidad: los resultados obtenidos vienen afectados de un porcentaje considerable de error, pero concuerdan con la estimación que hizo Laufer

a partir de la ecuación III-10 del término inercial, utilizando valores medidos para los términos restantes.

Cuando los modelos semiempíricos más sencillos fueron sustituidos por otros más complicados en los que aparecían las correlaciones estas medidas debieron ser completadas. Rotta repitió las de Laufer para un canal entre dos placas infinitas paralelas. Hanjalic y Launder realizaron unas medidas muy completas para un canal asimétrico.

Mención aparte merecen las medidas publicadas por Comte-Bellot en 1965. Se trata de un conjunto de medidas extraordinariamente sistemático y que proporciona la información más completa de todos los trabajos experimentales obtenidos para un canal. Se trataba de un canal rectangular de paredes lisas. La longitud era de 12 m y la anchura  $2h = 0.180$  m, elegidas para poder obtener números de Reynolds muy altos y que la región inmediata a la pared fuera accesible a las sondas de hilos calientes. La anchura del canal era trece veces su altura y la mayoría de las medidas se realizaron en la sección central del mismo (el plano que une las líneas centrales de los dos lados mayores), de forma que se aproxima tanto al flujo bidimensional que los resultados se pueden comparar directamente con las predicciones teóricas. El fluido utilizado fue aire. Las velocidades medias del flujo variaban entre 5 y 42 m/s según las distintas medidas y los números de Reynolds entre  $57 \times 10^3$ ,  $250 \times 10^3$ . En nuestro trabajo utilizaremos estas medidas como referencia, por ser las únicas que incluyen tablas para correlaciones entre componentes de la velocidad medidos en puntos distintos del espacio y del tiempo. Las demás medidas publicadas se refieren a stresses de Reynolds o intensidades turbulentas medidas en los mismos puntos del espacio y del tiempo,

ya que los modelos semiempíricos consideran la turbulencia como un fenómeno local. Como una continuación de este trabajo apareció en 1976 otro realizado por Sabot y Comte-Bellot (33) para un tubo cilíndrico que puede también sernos de utilidad en la región próxima a la pared. A partir de las coincidencias entre estos trabajos se pueden sacar algunas conclusiones. Debemos subrayar también algunas discrepancias importantes. La visión del flujo que se obtiene podría ser resumida así: De acuerdo con el perfil de velocidad media se pueden distinguir en el flujo tres regiones o capas:

i) Zona inmediata a la pared. - En ella predomina la acción de la viscosidad y las medidas más recientes distinguen aquí dos subcapas. Una, muy delgada, pegada a la pared, a la que a veces, en forma impropia, se llama "capa laminar". En esta capa la acción de la viscosidad amortigua las posibles fluctuaciones, de forma que la correlación entre ellas es despreciable y la velocidad media es nula aunque el flujo no pueda ser considerado como laminar. Entre esta región y la capa inercial o logarítmica hay una zona conocida como "buffer layer", capa tope o de retención, lugar donde entran y salen cosas. Y lo que sale y entra en esta capa es el momento, pues esta región corresponde a la máxima producción de energía turbulenta. En ella se producen "sweeps", sumideros y "bursts" fuentes de energía turbulenta, en los que el stress de Reynolds alcanza valores que pueden ser cinco veces mayores que los que se detectan en resto del fluido. Para una anchura adimensionalizada del canal de  $y^+ = 10^4$ , la región de producción se extiende desde aproximadamente  $y^+ = 5$  hasta  $y^+ = 30$ , (34), (35), (36).

ii) Capa inercial o logarítmica. - En ella el stress de Reynolds es aproxi

madamente constante, de forma que la producción compensa la disipación y los términos difusivos; en esta zona domina completamente el transporte inercial.

iii). - "Core" o región central: La velocidad media viene dada mediante una ley deficitaria que se puede aproximar bien por una parábola. El perfil de velocidad no es tan universal como el de la zona logarítmica, ya que p.ej. es distinto en el canal y en el tubo cilíndrico. Las medidas de Comte-Bellot dan para el stress de Reynolds valores que disminuyen desde la zona de producción en la región inmediata a la pared hasta el centro del canal. Es necesario suponer que parte de la energía turbulenta producida cerca de la pared se transmite al centro del canal. Esta transmisión se hace por difusión a través de la capa inercial, ya que cuando decimos que los términos de difusión son pequeños nos referimos a su comparación con el orden de magnitud del transporte inercial en la zona.

Cuando el canal no es simétrico, como en el caso estudiado por Hanjalic y Launder en que una pared es lisa y la otra rugosa, el plano  $y_0$  de cizalladura nula no coincide con el de velocidad máxima  $y_M$ . El plano  $y_0$  se encuentra más cerca de la pared lisa que  $y_M$ , y a su vez el plano de disipación mínima  $y_E$  se encuentra más cerca que  $y_0$  de dicha pared. Entre  $y_0$  e  $y_M$  existe un volumen de fluido para el que la producción es negativa. No se puede interpretar como disipación viscosa pues el fenómeno tiene lugar a números de onda bajos al contrario que ésta. Algunos autores creen que parte de la energía turbulenta del rango inercial vuelve a pasar al flujo medio. Por otro lado hay que hacer notar que la contribución cuantitativa de este fenómeno no es muy importante.

Entre los trabajos de Comte-Bellot y de Hanjalic y Launder, se observa algunas discrepancias. Por ejemplo, H. & L. encuentran universalidad en el perfil de velocidad media para números de onda mucho mas bajos que C-B. Además, en las medidas de energía turbulenta, C-B encuentra una anisotropía muy acusada en la dirección del flujo que no es detectada por H & L. Todo ello hace pensar que se necesita más trabajo experimental en la materia, lo que debido a la dificultad de mejorar los métodos existentes de determinación de velocidades mediante sondas de hilos calientes no se realizará hasta que los métodos de determinación por laser estén a punto.

#### Modelos semiempíricos para la turbulencia

Decíamos que las teorías de cierre de la jerarquía de ecuaciones obtenidas a partir de la ecuación de continuidad y de transporte de momento para un fluido incompresible se ocupan siempre del caso más sencillo, la turbulencia homogénea e isotrópica. Pero lo que en la mayoría de los casos lleva al estudio de la turbulencia no es este flujo específico e ideal, sino la necesidad de efectuar cálculos y predicciones para los flujos reales. La necesidad de encontrar una solución que sirviera en los problemas de ingeniería en que aparecen flujos turbulentos llevó a formular los modelos semiempíricos.

La hipótesis fundamental de estos modelos es la posibilidad de sustituir las correlaciones por expresiones más sencillas que sean una combinación causa-efecto. En los modelos más avanzados esta sustitución se hace en los distintos sumandos de la segunda ecuación de la jerarquía. Hasta el momento no existe ningún modelo aplicable a flujos con gradientes significativos en más de una dirección, como ocurre por ejem

en los flujos con recirculación. La estimación de cada modelo, debido al fin práctico que persiguen, no se mide únicamente por la simulación física sino que intervienen otros factores, como son el tiempo de computación, complejidad de esta, etc.

Entre los primeros modelos están los más conocidos: El de viscosidad de vórtice (eddy viscosity), debido a Boussinesq y el de longitud de mezcla (mixing length), propuesto por Prandtl. Aunque las aproximaciones realizadas son bastante primitivas, su simplicidad hace que todavía sean empleados en ingeniería.

Puesto que como hemos visto, tanto el tensor de viscosidad como el tensor de esfuerzos drenan la energía del flujo medio, puede probarse sustituir las correlaciones por una analogía del término viscoso: un gradiente de velocidad media multiplicado por un factor que por analogía se llamó viscosidad de vórtice.

$$\text{III-61} \quad \langle u'_1 u'_2 \rangle = \epsilon_\tau \partial_{x_2} U$$

En principio se tomó para  $\epsilon_\tau$  un valor constante, pero modelos mas avanzados proponen una forma funcional, si bien sencilla. Prandtl propuso una expresión inspirada en la teoría cinética de los gases, donde aparece una longitud de mezcla (mixing length)  $l_m$

$$\text{III-62} \quad \epsilon_\tau = (\langle u'_1 u'_2 \rangle / \partial_{x_2} U) = l_m v_t$$

donde  $v_t$  es una velocidad turbulenta expresada como función a su vez de  $l_m$

$$\text{III-63} \quad v_t = l_m |\partial_y U|.$$

Como vemos, el modelo de viscosidad de vórtice no toma en cuenta ninguna



propiedad de la turbulencia. Modelos más aproximados se obtendrán a partir de sustituciones en la ecuación para las correlaciones. Las correlaciones tomadas en cuenta por los modelos semiempíricos que se ocupan de esta ecuación son aquellas para las velocidades tomadas en los mismos puntos del espacio y del tiempo. Esto se debe a que las medidas se hacen mucho más complejas cuando se trata de obtener correlaciones en puntos distintos. Desde el punto de vista de la DIA, como hemos notado en el capítulo anterior, esto no tiene sentido, pero nos parece conveniente un breve análisis, teniendo en cuenta el éxito alcanzado para la mayoría de los flujos sencillos. Aunque alguno de estos modelos fué propuesto en fechas tempranas (1951) su desarrollo se vió afectado por las escasas posibilidades de computación existentes entonces. El más reciente, desarrollado por Hanjalic y Launder ( 5 ) en el Imperial College de Londres se aplica con éxito a más de trece distintas clases de flujo.

El modelo de Rotta de 1951 ( 37 ) fué el primero en proponer dentro de la ecuación para las correlaciones una simulación para el término de redistribución. Para ello parte del análisis, realizado en las páginas anteriores, de la presión. Según III-45, el término de redistribución se puede expresar como .

$$\text{III-64} \quad \langle p \partial_{x_j} u'_i \rangle(x) = -(1/2\pi) \int \frac{dV}{V(r)} r^{-1} \partial_{r_1} u_k(\vec{x}+\vec{r}) \langle \partial_{x_1} u'_m(\vec{x}+\vec{r}) \partial_{x_j} u'_i(\vec{x}) \rangle + \\ + (1/4\pi) \int \frac{dV}{V(r)} r^{-1} \langle \partial_{x_1}^2 u'_k u'_m(\vec{x}+\vec{r}) \partial_{x_j} u'_i(\vec{x}) \rangle$$

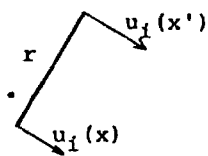
Si la velocidad media se hace cero, solo permanecerá el segundo sumando de esta expresión. Este sumando corresponde pues al efecto de correl

presión-gradiente de velocidad en el caso homogéneo e isótropo. Sabemos que de alguna forma, el término redistributivo tiende a restablecer la isotropía. El término  $\langle p \partial_{x_i} u_i' \rangle$  representa un transvase de energía a la dirección  $i$ , que será positivo si la componente  $i$  de la fluctuación de velocidad es menor que las restantes componentes y negativo en el caso contrario. Se supone entonces que este término será proporcional a  $|(3/2)\langle u_i'^2 \rangle - E_0|$  donde  $E_0$  viene dado por  $E_0 = (1/2)\langle u_i' u_i' \rangle$ . Teniendo en cuenta las dimensiones del término anterior, Rotta elige

$$\text{III-75} \quad \langle p \partial_{x_i} u_i' \rangle = -K_p \sqrt{E}/L (\langle u_i'^2 \rangle - (2/3)E_0)$$

donde  $L$  es una longitud de correlación (entre componentes de velocidad normales al vector que une los dos puntos)

$$\text{III-76} \quad L = \int_0^\infty dr g(r) \quad , \quad g(r) = \langle u_i'(\vec{x}) u_i'(\vec{x}') \rangle / \langle u_i'^2(\vec{x}) \rangle \langle u_i'^2(\vec{x}') \rangle^{1/2}$$



mientras que el término que incluye las derivadas cruzadas vendrá dado por

$$\text{III-77} \quad \langle p (\partial_{x_j} u_i' + \partial_{x_i} u_j') \rangle = -K_p \sqrt{E_0}/L (\langle u_i' u_j' \rangle - (2/3) \delta_{ij} E_0)$$

Para simular la parte anisótropa, recordando el desarrollo de  $\partial_{x_m} u_1$  en serie de Taylor (III-46)

$$\partial_{x_m} u_1(\vec{x} + \vec{r}) = \partial_{x_m} u_1(\vec{x}) + \dots + \sum_{s=1}^{\infty} (1/s!) \sum_{u_1=1}^{\dots} \dots \sum_{u_s=1}^{\dots} \partial_{x_{u_1} x_{u_2} \dots x_{u_s}}^{s+1} u_1(x) r_{u_1} \dots r_{u_s}$$

escribimos para el primer sumando de III-74

$$\text{III-78} \quad \langle p'_M \partial_{x_j} u'_i(x) \rangle = \partial_{x_m} U_1(x) a_{1j}^{mi} + \partial_{x_m}^2 U_1(x) b_{lnj}^{mi} + \dots$$

donde  $a_{1j}^{mi}$ ,  $b_{lnj}^{mi}$ , ..., son coeficientes tensoriales cuyo número puede reducirse considerablemente a partir de las relaciones existentes entre ellos. Los valores restantes pueden determinarse por ajustes a un caso sencillo. Para ajustar  $K_p$  Rotta utilizó datos de turbulencia homogénea e isotrópica, y para los coeficientes  $a$  y  $b$ , medidas de la zona logarítmica del canal. En su primer trabajo de 1951 que corresponde al modelo más sencillo, Rotta toma para  $L$  diversas prescripciones semiempíricas como la longitud de mezcla en un tubo cilíndrico. En un trabajo posterior, deriva mediante integración una ecuación para  $L$ , con lo que su modelo pasa a constar de tres ecuaciones: la de la energía turbulenta, la de las correlaciones y la deducida para  $L$ .

Hay que hacer notar que para el término de redistribución debía haberse utilizado la ecuación III-39 en vez de la III-37 en los casos en que el modelo se aplica cerca de la frontera, como es el caso de la capa logarítmica. Al tomar III-37 se está despreciando la contribución de la integral

$$\text{III-79} \quad s_{ij} = (1/2\pi) \int_S dS_c(x+r) (1/r) \partial_n p'(x+r)$$

Bradshaw demostró (38) que esta integral contribuiría en forma efectiva siempre que el tamaño de los vórtices que llevan la energía fuera del orden de la distancia a la pared. Como esta condición se satisface siempre en los flujos internos, Irving dió una expresión que permite calcular  $s_{ij}$  por el método de las imágenes:

$$\text{III-80} \quad \langle p \partial_{x_j} u'_i \rangle = (1/4\pi) \int_{\text{Vol}} dv (1/r + 1/r^*) \left[ \partial_{r_1} u_k(\vec{x} + \vec{r}) \cdot \right. \\ \left. \cdot \langle \partial_{x_1} u'_m(\vec{x} + \vec{r}) \partial_{x_j} u'_i(\vec{x}) \rangle + \langle \partial_{x_1}^2 u'_1 u'_m(\vec{x} + \vec{r}) \partial_{x_j} u'_i(\vec{x}) \rangle \right]$$

$r^* = x^* - x$ ,  $x^*$  es la imagen de  $x$  respecto a la pared.

El modelo de Launder-Reece-Rodi incluye esta modificación para la simulación del término inercial. Es algo diferente del de Rotta, pues en lugar de una ecuación para la longitud de correlación  $L$  deriva una ecuación para la energía disipada  $\epsilon$ .

En resumen, la mayoría de los modelos semiempíricos de más de dos ecuaciones han utilizado el problema objeto de este trabajo, flujo turbulento en un canal formado por dos superficies infinitas, para ajustar sus constantes. Estos modelos han hecho determinadas simplificaciones, que dado el buen acuerdo de sus resultados con los datos experimentales, pueden ser consideradas válidas. De acuerdo con ello el flujo en la zona inercial del canal tiene las siguientes características:

- i) En ella domina el efecto debido al término que hemos llamado redistributivo de la ecuación para las correlaciones.
- ii) En el término redistributivo se pueden distinguir tres partes: una debida a la velocidad media, una contribución en forma de integral a la pared y otra debida a las velocidades fluctuantes, que es la única que tiene un valor no nulo en la turbulencia homogénea e isotrópica.
- iii) De los sumandos anteriores, el mas importante es el debido a la velocidad media, y en la mayoría de los modelos semiempíricos se desprecian las otras dos contribuciones.
- iv) En la zona inercial se suele considerar pequeño el término difusivo. En el centro del canal en donde esta aproximación no es factible, sólo se tienen en cuenta las triples correlaciones.

## APLICACION DE LA DIA A FLUJOS REALES.CALCULO DE LOS SEGUNDOS MOMENTOS DE LA VELOCIDAD EN LA REGION LOGARITMICA DE UN CANAL.

Aunque la aproximación de la interacción directa se desarrolló originalmente para la turbulencia homogénea e isotrópica, puede extenderse a la turbulencia en el caso general, no isotrópica e inhomogénea. Esta extensión ha sido hecha con toda generalidad (7,8) para cualquier tipo de condición de contorno. Por razones de extensión aquí se expondrá ya aplicada al problema que nos ocupa.

### 1.-APLICACIÓN DE LA DIA AL FLUJO ENTRE DOS PLACAS PARALELAS INFINITAS

La primera dificultad que plantea la aplicación de la DIA a los flujos con cizalla es la eliminación de la presión en función de las velocidades. En la turbulencia homogénea e isotrópica esta dificultad no aparece, ya que es factible el paso al espacio de onda y el operador diferencia  $P_{ijm}(V)$  se convierte mediante esta transformación en un factor  $M_{ijm}(k)$ . La componente  $i$  de la velocidad en el punto  $(x,t)$  de un flujo turbulento incompresible en un dominio  $V$ , debe satisfacer:

$$(\partial_t - \nu \nabla^2) u_i = -u_j \partial_{x_j} u_i - \partial_{x_i} p$$

$$\partial_{x_i} u_i = 0.$$

La presión debe satisfacer

$$\nabla^2 p = -\partial_{x_i x_j}^2 (u_i u_j).$$

El sistema de las dos primeras ecuaciones lleva impuestas como condiciones de contorno

$$\text{IV-1} \quad \vec{u}(\vec{x}) = 0 \text{ para } x_2=0 \\ x_2=2h$$

mientras que la tercera debe satisfacer en el contorno la condición

$$\text{IV-2} \quad \partial_{x_2} p = \nu \partial_{x_2}^2 u_2, \quad x_2=0 \\ x_2=2h.$$

Si  $D(x,y)$  es la función de Green para el canal, solución de

$$\text{IV-3} \quad \nabla_x^2 D(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

con la condición de contorno

$$\text{IV-4} \quad \partial_{x_2} D(x,y) = 0, \quad x_2 = 0 \\ x_2 = 2h,$$

se puede escribir entonces la presión como:

$$\text{IV-5} \quad p(\vec{x}, t) = -\int_{Y_1 Y_2} d\vec{y} D(\vec{x}, \vec{y}) \partial_{y_1 y_2}^2 \{u_1(y, t) u_2(y, t)\} + \int_B dy_1 dy_3 D(x, y) \partial_{y_2}^2 u_2(y_B, t)$$

donde  $B$  es la superficie de contorno, en el caso del canal las paredes  $x_2=0$  y  $x_2=2h$ .

Por otro lado, hay que tener en cuenta que además el movimiento del flujo se debe a un gradiente de presiones exteriores que deben satisfacer

$$\text{IV-6} \quad \nabla^2 p_{\text{ext}} = 0, \quad \partial_{x_2} p_{\text{ext}} = 0, x_2=0, 2h.$$

En III-55 hemos visto que para el flujo completamente turbulento esta presión exterior viene dada por

$$\text{IV-7} \quad p_{\text{ext}} = -x_1 |d_{x_1} p|.$$

Sustituyendo IV-5 en la ecuación de Navier-Stokes se obtiene una expresión en la que ya no aparece la presión:

$$\text{IV-8} \quad (\partial_t - \nu \nabla^2) u_i(\vec{x}, t) = -L_{ij}(\nabla) u_j(x, t) - (1/2) P_{ijm}(\nabla) (u_j(x, t) u_m(x, t)) - \partial_{x_i} p_{\text{ext}}.$$

Los operadores L y P vienen dados como

$$\text{IV-9} \quad L_{ij}(\nabla) f(\vec{x}) = \delta_{ij} \nu \partial_{x_i} \int_B dy_1 dy_2 dy_3 D(\vec{x}, \vec{y}) \partial_{y_1}^2 \partial_{y_2}^2 f(\vec{y})$$

$$\text{IV-10} \quad P_{ijm}(\nabla) = \partial_{x_m} P_{ij}(\nabla) + \partial_{x_j} P_{im}(\nabla)$$

$$\text{IV-11} \quad P_{ij}(\nabla) f(\vec{x}) = \delta_{ij} f(\vec{x}) - \int_V dy D(\vec{x}, \vec{y}) \partial_{y_i}^2 \partial_{y_j}^2 f(\vec{y}).$$

El dominio de integración viene dado por

$$-\infty \leq x_1 \leq \infty, \quad 0 \leq x_2 \leq 2h, \quad -\infty \leq x_3 \leq \infty.$$

Se observa que IV-9 es un término de contorno ya que la integral se extiende a la superficie que limita el flujo y aparece una dependencia en la viscosidad.

Siguiendo el procedimiento utilizado anteriormente podemos derivar la ecuación de Reynolds para este flujo turbulento en un canal. Descomponiendo el campo de velocidades  $u_i$  en un campo medio  $U_i(x, t)$  al que se superpone una fluctuación  $u'_i(x, t)$ , sustituyendo en IV-8 y promediando estadísticamente a las distintas realizaciones del flujo:

$$\text{IV-12} \quad (\partial_t - \nu \nabla^2) U_i(\vec{x}, t) + L_{ij}(\nabla) U_j(\vec{x}, t) = -(1/2) P_{ijm}(\nabla) (U_j(\vec{x}, t) U_m(\vec{x}, t)) - \\ -(1/2) P_{ijm}(\nabla) Q_{jm}(x, t; x, t) - \partial_{x_i} p_{\text{ext}}.$$

donde  $Q_{jm}$  representa la correlación entre la componente j de la fluctuación de velocidad en  $(x, t)$  y la componente m también en  $(x, t)$ .

De forma análoga se obtienen las ecuaciones para las correlaciones  $Q_{in}(x, t; x', t')$  y para la función de respuesta infinitesimal. Ya que

$Q_{in}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \langle u'_i(\vec{x}, t) u'_n(\vec{x}', t') \rangle$  bastará multiplicar IV-8 a la izquierda por  $u'_n(\vec{x}', t')$ , tener en cuenta algunas propiedades de la derivación, como se hizo en III-7, promediando estadísticamente a las distintas realizaciones nel flujo. La expresión que se obtiene es:

$$\begin{aligned} \text{IV-13} \quad (\partial_t - \nu \nabla^2) Q_{in}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + L_{ij}(\nabla_x) Q_{jn}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \\ = -P_{ijm}(\nabla_x) (U_m(\vec{x}, t) Q_{jn}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) - (1/2) P_{ijm}(\nabla_x) S_{jmn}(\vec{x}, t; \vec{x}, t; \vec{x}', t') \end{aligned}$$

En esta expresión,  $S_{jmn}$  representa las triples correlaciones y está definido en general como:

$$\text{IV-14} \quad S_{jmn}(\vec{x}, t; \vec{x}', t'; \vec{x}'', t'') = \langle u_j(\vec{x}, t) u_m(\vec{x}', t') u_n(\vec{x}'', t'') \rangle .$$

Definamos la función respuesta infinitesimal como

$$\begin{aligned} G_{in}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= \left\langle \frac{\delta u_i(\vec{x}, t)}{\delta f_n(\vec{x}', t')} \right\rangle & t \geq t' \\ &= 0 & t < t' \end{aligned}$$

La ecuación para la función de respuesta infinitesimal se obtiene suponiendo una pequeña perturbación en el campo de velocidades  $\delta u_i(\vec{x}, t)$  originada por una pequeña variación  $\delta f_n(\vec{x}', t')$  de la fuerza  $\partial_{x_i} p_{ext}$  que origina dicho campo. Si además se desglosa el campo sin perturbar en un campo medio  $U_i(\vec{x}, t)$  al que se superponen fluctuaciones  $u'_i(\vec{x}, t)$ , se obtiene para la perturbación del campo de velocidades  $\delta u_i(\vec{x}, t)$

$$\begin{aligned} \text{IV-15} \quad (\partial_t - \nu \nabla_x^2) \delta u_i(\vec{x}, t) + L_{ij}(\nabla_x) \delta u_j(\vec{x}, t) + P_{ijm}(\nabla_x) (U_m(\vec{x}, t) \delta u_j(\vec{x}, t)) + \\ + P_{ijm}(\nabla_x) (u'_m(\vec{x}, t) \delta u_j(\vec{x}, t)) = \delta f_i(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

y de aquí

$$\delta u_i(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^t dt' G_{in}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') \delta f_n(\vec{x}', t')$$



donde  $G_{in}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$  es la solución de

$$\begin{aligned} \text{IV-16} \quad (\partial_t - \nu \nabla_x^2) G_{in}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + L_{ij}(\nabla_x) G_{jn}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + \\ + P_{ijm}(\nabla_x) (U_m(\vec{x}, t) G_{jn}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + P_{ijm}(\nabla_x) H_{jmn}(\vec{x}, t; \vec{x}, t; \vec{x}', t')) = \\ = \delta_{in} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t'). \end{aligned}$$

El término  $H_{jmn}$  representa en general:

$$\text{IV-18} \quad H_{jmn}(\vec{x}, t; \vec{x}; t'; \vec{x}'', t'') = \langle u_m(\vec{x}, t') \frac{\delta u_j(\vec{x}, t)}{\delta f_n(\vec{x}'', t'')} \rangle$$

Las ecuaciones estadísticas del movimiento IV-13 y IV-16 son exactas. Sin embargo hay que cerrarlas mediante una aproximación ya que en ella aparecen momentos estadísticos de orden tres siendo ecuaciones para momentos de orden 2. Se trata por lo tanto de obtener para  $S_{jmn}$  y para  $H_{jmn}$  expresiones en función de  $Q_{in}$  y  $G_{in}$  mediante la aproximación de interacción directa. Para ello se sustrae la ecuación de Reynolds para el campo medio de velocidades IV-12 de la ecuación IV-8 para el campo de velocidades

$$\begin{aligned} \text{IV-18} \quad (\partial_t - \nu \nabla^2) u_i'(\vec{x}, t) + L_{ij}(\nabla) u_j'(\vec{x}, t) + P_{ijm}(\nabla) (U_j(\vec{x}, t) u_m'(\vec{x}, t)) = \\ - (1/2) P_{ijm}(\nabla) (u_j(\vec{x}, t) u_m(\vec{x}, t) - Q_{jm}(\vec{x}, t; \vec{x}, t)) \end{aligned}$$

El primer miembro de esta ecuación describe el efecto de las fuerzas viscosas, el contorno y el flujo medio sobre las fluctuaciones de velocidad. El segundo miembro describe la interacción del campo fluctuante consigo mismo. Si falta este segundo miembro, la solución de IV-18 es

$$\text{IV-19} \quad u_i^{(0)}(\vec{x}, t) = \int d^3x' G_{ij}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t_0) u_j'(\vec{x}', t_0)$$

donde  $G_{ij}^{(0)}$  es la función de Green de orden cero, solución de la ecuación

IV-16 al prescindir del sumando que incluye  $H_{jmn}$ .

El campo fluctuante  $u'_1(x,t)$  se puede desarrollar como serie funcional de potencias de  $u^{(0)}$  y  $G^{(0)}$  si se considera en IV-18 el segundo miembro como una perturbación y se resuelve la ecuación por iteración. Sustituyendo esta serie en IV-14 se obtiene una expresión para  $S_{jmn}$  en función de  $u^{(0)}$  y de  $G^{(0)}$ . Para poder promediar estadísticamente es necesario hacer la hipótesis equivalente a la H-1 de la turbulencia homogénea e isotrópica:

H1.-  $u'(x, t_0)$  tiene una función de distribución de probabilidad gaussiana. Por lo tanto, siendo  $u^{(0)}(x, t)$  una funcional lineal de  $u'(x, t_0)$ , su distribución de probabilidad será también gaussiana.

Al promediar estadísticamente, cualquier momento de  $u^{(0)}$  se podrá expresar según las reglas para distribuciones gaussianas. Los resultados de este procedimiento son:

$$\begin{aligned}
 \text{IV-20} \quad S_{jmr}(x, t; x', t'; x'', t'') = & \\
 = -\int d^3y \{ & \int_{t_0}^t ds G_{ja}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) P_{abc}(V) [Q_{mb}^{(0)}(\vec{x}', t'; \vec{y}, s) O_{rc}^{(0)}(\vec{x}'', t''; \vec{y}, s)] - \\
 & - \int_{t_0}^t ds G_{ma}^{(0)}(\vec{x}, t'; \vec{y}, s) P_{abc}(V) [Q_{jb}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) Q_{rc}^{(0)}(\vec{x}'', t''; \vec{y}, s)] - \\
 & - \int_{t_0}^t ds G_{ra}^{(0)}(\vec{x}'', t''; \vec{y}, s) P_{abc}(V) [Q_{jb}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) Q_{mc}^{(0)}(\vec{x}', t'; \vec{y}, s)] \} + \\
 & + (\text{términos de orden superior}).
 \end{aligned}$$

De igual forma, la función de respuesta infinitesimal se considera como una serie funcional de potencias de  $u^{(0)}$  y de  $G^{(0)}$  si en IV-16 se considera el último sumando del primer miembro como una perturbación. Procediendo iterativamente y teniendo en cuenta la hipótesis 1 queda:

$$\text{IV-21 } H_{jmr}(x, t; x', t'; x'', t'') = - \int d\vec{y} \int_{t_0}^t ds G_{ja}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) P_{abc}(\vec{v}_y) [Q_{mb}^{(0)}(\vec{x}', t'; \vec{y}, s) G_{cr}^{(0)}(y, s; x'', t'')] ]$$

+ (términos de orden superior).

H2.- La serie iterativa para  $S_{jmr}$  y  $H_{jmr}$ , puede truncarse en el primer orden haciendo Q y G iguales a  $Q^{(0)}$  y  $G^{(0)}$  respectivamente.

Usando esta hipótesis queda:

$$\begin{aligned} \text{IV-22 } S_{jmr}(\vec{x}, t; \vec{x}', t'; \vec{x}'', t'') = & \\ & = - \int d\vec{y} \left( \int_{t_0}^t ds G_{ja}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) P_{abc}(\vec{v}_y) [Q_{mb}(\vec{x}', t'; \vec{y}, s) Q_{rc}(\vec{x}'', t''; \vec{y}, s)] \right. \\ & \quad \left. \int_{t_0}^t ds G_{ma}(\vec{x}', t'; \vec{y}, s) P_{abc}(\vec{v}_y) [Q_{jb}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) Q_{rc}(\vec{x}'', t''; \vec{y}, s)] \right. \\ & \quad \left. \int_{t_0}^t ds G_{ra}(\vec{x}'', t''; \vec{y}, s) P_{abc}(\vec{v}_y) [Q_{jb}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) Q_{mc}(\vec{x}', t'; \vec{y}, s)] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV-23 } H_{jmr}(x, t; x', t'; x'', t'') = & \\ & = - \int d\vec{y} \int_{t_0}^t ds G_{ja}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) P_{abc}(\vec{v}_y) [Q_{mb}(\vec{x}', t'; \vec{y}, s) G_{rc}(\vec{y}, s; \vec{x}'', t'')] \end{aligned}$$

En este caso la hipótesis 1 de la DIA es menos restrictiva, ya que la condición de normalización se impone sobre una condición inicial, en vez de hacerlo sobre una fuerza ficticia.

Las ecuaciones estadísticas IV-13, IV-14, IV-17, con las expresiones obtenidas utilizando la aproximación de interacción directa para los términos de interacción, que son IV-20 y IV-21, forman un sistema cerrado de tres ecuaciones integrodiferenciales acopladas entre sí. La resolución de este sistema con las condiciones de contorno correspondientes al canal nos permitirá calcular el perfil de la velocidad media. Sin embargo

con el análisis matemático existente hoy en día este cálculo no es posible. Dada la complejidad de las ecuaciones tampoco es factible su resolución numérica. Diversos autores (Orszag, Leslie, Herring) han hecho estimaciones acerca del número de puntos que se precisan para la discretización, si se quiere abordar de esta forma el problema, y estas dan cifras muy superiores a la capacidad operativa de los computadores mas modernos (serie ICL 2900). Hay que intentar por lo tanto introducir todas aquellas simplificaciones que permitan las características propias del problema y buscar alguna forma de comparar los cálculos hechos utilizando la DIA con los experimentos disponibles.

Para ello se ha pensado (23) en un cálculo de las correlaciones entre componentes de la velocidad en un flujo cuyo perfil de velocidad sea bien conocido. Leslie sugiere por ello que el flujo adecuado es la capa logarítmica. Hay que tener en cuenta dos grandes ventajas que presenta este flujo: ser el único cuyo perfil de velocidad ha sido predicho por procedimientos analíticos y existir para él medidas para dichas correlaciones en puntos y tiempos distintos. Este cálculo ha sido el objeto de nuestro trabajo.

#### CÁLCULO DE LAS CORRELACIONES ENTRE COMPONENTES DE VELOCIDAD EN LA CAPA LOGARÍTMICA EN UN CANAL.

Como se apuntaba antes, teniendo en cuenta las características del problema, veamos que simplificaciones se pueden introducir en el sistema formado por las ecuaciones IV-13 y IV-16. En la sección 3 vimos que en la capa inercial la producción viene equilibrada por la difusión y la disipación. Recordemos que los resultados experimentales indicaban que en el canal existía una región de producción en la zona intermedia

(buffer layer), correspondiendo a números de onda muy bajos. Esta energía es transportada en la zona inercial desde la región de producción hasta la zona central y de los números de onda bajos a los altos en los que es disipada. En la zona inercial, la mayor parte de la energía corresponderá a los números de onda bajos y por lo tanto la disipación que tiene lugar en los números altos será poco importante. De aquí que en la ecuación de las correlaciones y en la de la función de respuesta infinitesimal para el flujo logarítmico se pueda considerar pequeño y despreciar el término  $vV^2 Q_{in}$ .

Analicemos el papel del término que incluye a  $L_{ij}(V)$ . Este término corresponde a una integral sobre el contorno que va multiplicada por la viscosidad. Corresponde así a la integral de superficie III-80, que ha sido despreciada en la mayoría de los modelos semiempíricos. El buen acuerdo logrado por estos modelos con los resultados experimentales nos lleva a proponer aquí esta misma simplificación. Si la capa logarítmica tuviera sus contornos perfectamente definidos, el término que incluye  $L_{ij}(V)$  sería nulo, ya que la capa logarítmica no llega hasta el contorno del flujo. Debido a que el flujo logarítmico está definido de forma asintótica, las condiciones de contorno son muy difíciles de imponer y nos vemos en la necesidad de incluir en nuestros cálculos también la región comprendida entre la capa logarítmica y la pared. Consideraremos por tanto de forma análoga a como lo hacen los modelos semiempíricos que el término con  $L_{ij}(V)$  es pequeño y al despreciarlo sustituiremos su efecto por una condición impuesta en la pared. Esto modificará a las correlaciones en la región viscosa pero no en la capa inercial que es en la que estamos interesados. Las ecuaciones IV-13 y IV-16

toman la siguiente forma, de acuerdo con las hipótesis que hemos hecho para el flujo logarítmico en un canal.

$$\begin{aligned} \text{IV-24} \quad \partial_t Q_{in}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + P_{ijm}(\nabla_x) (U_m(\vec{x}, t) Q_{jn}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = \\ = -(1/2) P_{ijm}(\nabla_x) S_{jmn}(\vec{x}, t; \vec{x}, t; \vec{x}', t') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV-25} \quad \partial_t G_{in}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + P_{ijm}(\nabla_x) (U_m(\vec{x}, t) G_{jn}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = \\ = \delta_{in} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') - P_{ijm}(\nabla_x) H_{jmn}(\vec{x}, t; \vec{x}, t; \vec{x}', t') \end{aligned}$$

donde  $S_{jmn}$  y  $H_{jmn}$  corresponden a las expresiones IV-22 y IV-23 respectivamente. Los términos de estas dos ecuaciones pueden ser comparados con los términos de la ecuación III-31. Teniendo en cuenta que el operador  $P_{ijm}(\nabla_x)$  está definido como:

$$\begin{aligned} P_{ijm}(\nabla_x) &= \partial_{x_m} P_{ij}(\nabla_x) + \partial_{x_j} P_{im}(\nabla_x) \\ P_{im}(\nabla_x) f(\vec{x}) &= \delta_{ij} f(\vec{x}) - \int_V dy D(\vec{x}, \vec{y}) \partial_{y_i}^2 \partial_{y_j} f(\vec{y}) \end{aligned}$$

siendo  $D(\vec{x}, \vec{y})$  la solución de la ecuación  $\nabla_x^2 D(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$  con la condición de contorno  $\partial_{x_2} D(\vec{x}, \vec{y}) = 0, x_2 = 0, 2h$ . Según esto, en el segundo sumando del primer miembro de la ecuación para las correlaciones están incluidos el término convectivo, el de producción y parte del término inercial de III-31. Tanto en el término distributivo como en el difusivo, hay una parte que depende (a través de la presión) de la velocidad media y esta será la incluida en el segundo sumando del primer miembro de la ecuación para las correlaciones. En cuanto al segundo miembro de esta ecuación, la parte de este término en la que la  $\delta_{ij}$  asociada a  $P_{ij}(\nabla)$  actúa sobre  $S_{jmn}$  corresponde a las triples correlaciones, mien-

tras que aquel sumando en que actúa la integración corresponde a los sumandos restantes del término redistributivo y difusivo debido a la interacción de las fluctuaciones entre sí. Recordando la discusión de órdenes de magnitud relativa para la parte de los términos redistributivo y difusivo debida a la velocidad media y aquella debida a la interacción de las fluctuaciones, realizada en la sección III, pag 76 podemos afirmar que el segundo miembro de las ecuaciones IV-24 y IV-25 es pequeño frente al segundo sumando del primer miembro. Puede, por lo tanto plantearse un procedimiento iterativo para la resolución del sistema de ecuaciones.

Y por último, la simetría comprobada empíricamente entre las direcciones  $x_1$  y  $x_3$  nos permite, como ya apuntábamos en la sección III (pag. 62) considerar el flujo como bidimensional, y tratarlo sólo en las direcciones  $x_1$  y  $x_2$ .

Para el tratamiento iterativo del sistema IV-24 y IV-25 tomamos como aproximación de orden cero anulando el segundo término de las ecuaciones, con lo que para el orden cero este sistema se reduce a

$$\text{IV-26} \quad \partial_t Q_{in}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + P_{ijm}(\nabla_x)(U_m(\vec{x}, t) Q_{in}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = 0$$

$$\text{IV-27} \quad G^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + P_{ijm}(\nabla_x)(U_m(\vec{x}, t) Q_{jn}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = \delta_{in} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t')$$

Una vez obtenidas  $Q^{(0)}$  y  $G^{(0)}$  se sustituyen estas expresiones en las  $Q$  y en las  $G$  necesarias para calcular el término de interacción, es decir, el segundo miembro de IV-25. El orden 1 de la iteración puede obtenerse a partir de la función de Green  $G^{(0)}$  ya que ésta no sólo corresponde al orden cero de la iteración, sino también a la ecuación homogé-

nea

$$\text{IV-28} \quad Q_{in}^{(1)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \int d\vec{y} \int d\tau G_{ij}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') [P_{irs}(\vec{v}_x) S_{rsn}(\vec{y}, \tau; \vec{y}, \tau; \vec{x}', t')]$$

Tomaremos solamente hasta el primer orden de la iteración, comparando  $Q_{in}^{(1)}$  con los resultados experimentales de Comte-Bellot y Sabot. Si nuestras hipótesis son correctas y la DIA funciona, debe existir buen acuerdo. Las razones de pararnos en el primer orden de la iteración son, por un lado, el análisis de órdenes de magnitud realizado en páginas anteriores y por otro, una analogía con las ecuaciones para los modelos semi-empíricos que ha sido hecha por otros motivos por Leslie y que veremos en la sección siguiente. Pasamos pues a ocuparnos del orden cero de la iteración. Es imprescindible, debido a la inhomogeneidad de nuestro problema, escribir todos los subíndices explícitamente con lo que los cálculos se presentarán de la forma más resumida posible aunque inevitablemente resulten algo tediosos.

IV-29

$$\text{a.-} \quad \partial_t Q_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + P_{111}(\vec{v}_x) (U_1(\vec{x}, t) Q_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) + P_{112}(\vec{v}_x) (U_1(\vec{x}, t) Q_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = 0$$

$$\text{b.-} \quad \partial_t Q_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + P_{211}(\vec{v}_x) (U_1(\vec{x}, t) Q_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) + P_{121}(\vec{v}_x) (U_1(\vec{x}, t) Q_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = 0$$

$$\text{c.-} \quad \partial_t Q_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + P_{211}(\vec{v}_x) (U_1(\vec{x}, t) Q_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) + P_{221}(\vec{v}_x) (U_1(\vec{x}, t) Q_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = 0$$

$$\text{d.-} \quad \partial_t Q_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + P_{211}(\vec{v}_x) (U_1(\vec{x}, t) Q_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) + P_{221}(\vec{v}_x) (U_1(\vec{x}, t) Q_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = 0$$

y para la función de respuesta infinitesimal

IV-30

$$\begin{aligned} \text{a.-} \quad \partial_t G_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + \\ + P_{111}(\vec{v}_x) (U_1(\vec{x}, t) G_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) + P_{112}(\vec{v}_x) (U_1(\vec{x}, t) G_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = \\ = \delta_{11} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{b.- } \partial_t G_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + \\
+ P_{111}(\nabla_x)(U_1(\vec{x}, t)G_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) + P_{121}(\nabla_x)(U_1(\vec{x}, t)G_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = 0 \\
\text{c.- } \partial_t G_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + \\
+ P_{211}(\nabla_x)(U_1(\vec{x}, t)G_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) + P_{221}(\nabla_x)(U_1(\vec{x}, t)G_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = 0 \\
\text{d.- } \partial_t G_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + \\
+ P_{211}(\nabla_x)(U_1(\vec{x}, t)G_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) + P_{221}(\nabla_x)(U_1(\vec{x}, t)G_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = \\
= \delta_{22}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\delta(t-t')
\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas dos a dos tampoco puede ser resuelto directamente. Por ello se estudian las propiedades de la función  $D(\vec{x}, \vec{y})$  que nos pueden permitir simplificar los operadores  $P_{ijm}(\nabla_x)$ . Para ello hay que resolver

$$\nabla_x^2 D(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad \partial_{x_2} D(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \quad x_2 = 0, 2h.$$

Se trata de un problema de Newman, semejante al problema del campo eléctrico generado por un dieléctrico cargado en el interior de una cavidad. La solución exacta de este problema de contorno se puede expresar por la serie:

$$\begin{aligned}
\text{IV-31 } D(\vec{x}, \vec{y}) = 2h \sum_{n=1}^{\infty} (1/n\pi) \exp\{-((n-1)\pi/2h)|x_1-y_1|\} \cos\{((n-1)\pi/2h)x_2\} \times \\
\times \cos\{((n-1)\pi/2h)y_2\}.
\end{aligned}$$

La expresión es complicada y la serie converge lentamente. Para estudiarla hemos abordado el problema por métodos analógicos, simulando con papel conductor y dibujando las líneas de nivel correspondientes (ver Apéndice 1). Del estudio realizado se desprende que la aproximación más

sencilla posible para  $D(x,y)$  y sus derivadas consiste en reemplazar estas y la propia función como deltas de Dirac  $\delta(\vec{x}-\vec{y})$ . Con esta aproximación la ecuación para las correlaciones toma la forma:

IV-32

$$\begin{aligned} \text{a.- } \partial_t Q_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - \partial_{x_1} (U_1(\vec{x}, t) Q_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) &= 0 \\ \text{b.- } \partial_t Q_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - \partial_{x_1} (U_1(\vec{x}, t) Q_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) - \partial_{x_2} (U_1(\vec{x}, t) Q_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) &= 0 \\ \text{c.- } \partial_t Q_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - \partial_{x_1} (U_1(\vec{x}, t) Q_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) &= 0 \\ \text{d.- } \partial_t Q_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - 2\partial_{x_1} (U_1(\vec{x}, t) Q_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) - \partial_{x_2} (U_1(\vec{x}, t) Q_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) &= 0. \end{aligned}$$

y las ecuaciones para la función de respuesta infinitesimal

IV-33

$$\begin{aligned} \text{a.- } \partial_t G_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - \partial_{x_1} (U_1(\vec{x}, t) G_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) &= \delta(\vec{x}-\vec{x}') \delta(t-t') \\ \text{b.- } \partial_t G_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - 2\partial_{x_1} (U_1(\vec{x}, t) G_{11}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) - \partial_{x_2} (U_1(\vec{x}, t) G_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) &= 0 \\ \text{c.- } \partial_t G_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - \partial_{x_1} (U_1(\vec{x}, t) G_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) &= 0 \\ \text{d.- } \partial_t G_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - 2\partial_{x_1} (U_1(\vec{x}, t) G_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) - \partial_{x_2} (U_1(\vec{x}, t) G_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) &= \\ &= \delta(\vec{x}-\vec{x}') \delta(t-t') \end{aligned}$$

En la aproximación de orden cero las ecuaciones para las correlaciones no están acopladas con las ecuaciones para la función de respuesta. Entre sí, en cada sistema existe un acoplo a-b y c-d. Si en a-b en la ecuación para las correlaciones se sustituye  $Q_{11}$  por  $Q_{12}$  y  $Q_{21}$  por  $Q_{22}$  se obtienen las ecuaciones c-d. Como esta identificación en la aproximación de orden cero puede parecer contradictoria, debemos recor-

dar que  $Q_{21}$  no tiene por que ser igual a  $Q_{12}$  cuando hablamos de correlaciones entre fluctuaciones en distintos puntos del espacio y del tiempo. Tal identidad funcional (las constantes pueden ser distintas) no se da en las ecuaciones para la función de respuesta: Si sustituimos  $G_{11}$  por  $G_{22}$  y  $G_{21}$  por  $G_{22}$  en IV-33 a-b, no obtenemos IV-33 c-d. Al introducir en el siguiente orden de iteración los términos de interacción en que aparece las funciones  $G$ , desaparecerá esta identidad funcional.

#### RESOLUCIÓN DEL SISTEMA PARA EL ORDEN CERO DE LA ITERACIÓN

Para encontrar las correlaciones de orden cero, tomemos uno de los dos sistemas acoplados de IV-32. Teniendo en cuenta que  $U_1(\vec{x}, t) = f(x_2)$

IV-34

$$\partial_t Q_{12}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - \partial_{x_1} (f(x_2) Q_{22}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = 0$$

$$\partial_t Q_{22}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - 2\partial_{x_1} (f(x_2) Q_{12}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) - \partial_{x_2} (f(x_2) Q_{22}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) = 0$$

Este sistema de ecuaciones de primer orden en derivadas parciales, casi lineal, equivale a una ecuación en derivadas parciales de segundo orden. Utilizando el método de las características, puede demostrarse que se trata de un sistema parabólico (Apendice 2). No existe posibilidad de encontrar una forma normal válida para todo el dominio. Si pasamos a las variables normales del problema, la solución general será válida únicamente en un entorno de cada punto del dominio, sin que pueda extenderse una solución de un punto a otro.

Hay que buscar entonces una solución particular que satisfaga además de las condiciones de contorno, determinadas condiciones físicas.

En la ecuación en derivadas parciales a que equivale IV-34, aparecen tres variables. Una de ellas puede ser eliminada utilizando el método de separación de variables, mientras que para las dos restantes es necesario utilizar alguna hipótesis adicional. Siguiendo la línea empleada por Edwards y Irachnan para la turbulencia homogénea e isotrópica, supondremos para las correlaciones en el orden cero de la iteración una dependencia exponencial en el tiempo. Como se trata de un problema estacionario, esta dependencia lo será en  $\tau = t - t'$ . De igual forma, por ser el flujo homogéneo en la dirección  $x_1$ , la dependencia en esta dirección lo será en la variable  $\rho = x_1 - x'_1$ . Además, las funciones que representan a las correlaciones deben ser tales que decrezcan al aumentar cualquiera de las distancias  $\tau, \rho$ , ó  $x_2 - x'_2$ .

Derivando en IV-34a respecto a  $x_1$  y en IV-34b respecto a  $t$  se obtiene

$$\text{IV-35 a.- } \partial_{t'x_1} Q_{12}^{(0)} - \partial_{x_1}^2 (f Q_{22}^{(0)}) = 0$$

$$\text{b.- } \partial_{t'}^2 Q_{22}^{(0)} - 2\partial_{t'} \partial_{x_1} (f Q_{12}^{(0)}) - \partial_{t'} \partial_{x_2} (f Q_{22}^{(0)}) = 0$$

Sustituyendo  $\partial_{t'} \partial_{x_1} Q_{12}^{(0)}$  de a en b

$$\text{IV-36 } \partial_{t'}^2 Q_{22}^{(0)} - 2f^2(x_2) \partial_{x_1}^2 Q_{22}^{(0)} - f(x_2) \partial_{t'} \partial_{x_1} Q_{22}^{(0)} - (\partial_{x_2} f(x_2)) \partial_{t'} Q_{22}^{(0)} = 0$$

Suponemos una dependencia exponencial en el tiempo:

$$Q_{22}^{(0)} = e^{-\gamma \tau} \phi(\rho, x_2, x'_2)$$

donde  $\gamma$  es una constante que vendrá dada por las condiciones iniciales.

Sustituyendo esto en IV-36 obtenemos

$$\text{IV-37 } \gamma^2 \phi(\rho, x_2, x'_2) - 2f^2(x_2) \partial_{x_1}^2 \phi(\rho, x_2, x'_2) - \gamma f(x_2) \partial_{x_2} \phi(\rho, x_2, x'_2) - \gamma f'(x_2) \phi(\rho, x_2, x'_2) = 0$$

donde  $f'(x_2) = \partial_{x_2} f(x_2)$ .

Supongamos que la solución puede ser expresada como

$$\phi(\rho, x_2, x_2') = \psi(\rho) F(x_2, x_2')$$

Dividiendo ambos miembros de IV-37 por  $\phi(\rho, x_2, x_2')$  resulta

$$\begin{aligned} \text{IV-38} \quad \frac{(\gamma^2/2) - (\gamma/2) (f(x_2)/F(x_2, x_2')) \partial_{x_2} F(x_2, x_2') - (\gamma/2) f'(x_2)}{f(x_2)} &= (1/\psi(\rho)) \partial_{x_1}^2 \psi(\rho) = \\ &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Podemos escribir estas igualdades ya que el primer miembro no depende de  $\rho$ , ni el segundo de  $x_2$  ni de  $x_2'$ .  $\lambda$  es una constante que deberá ser determinada por las condiciones de contorno. Supondremos  $\lambda > 0$ . De IV-38 podemos escribir dos ecuaciones:

$$\text{IV-39} \quad \partial_{x_1}^2 \psi(\rho) = \lambda^2 \psi(\rho)$$

cuya integral es

$$\text{IV-40} \quad \psi(\rho) = \text{cte.} e^{\pm \lambda \rho} + \text{cte.}$$

Empleando la condición física a que nos hemos referido anteriormente podemos fijar la determinación de  $\psi(\rho)$  y así ponemos

$$\begin{aligned} \text{IV-41} \quad \psi(\rho) &= \text{cte.} e^{-\lambda |\rho|} + \text{cte.} \quad |\rho| = x_1 - x_1', \quad x_1 > x_1' \\ &= x_1' - x_1, \quad x_1 < x_1' \end{aligned}$$

La solución de la segunda ecuación de IV-38 es evidentemente:

$$\begin{aligned} \text{IV-42} \quad F(x_2, x_2') &= C_1 \phi(x_2') (1/f(x_2)) \exp\left(-\gamma \int \frac{dx_2}{f(x_2)} + (2\lambda^2/\gamma) \int f(x_2) dx_2\right) \\ &+ C_2. \end{aligned}$$

Como en la dirección  $x_2$  no existe homogeneidad, no es posible, como se ha hecho en la dirección  $x_1$ , suponer que la dependencia en  $x_2'$  se obtiene substituyendo en IV-42  $x_2$  por  $x_2 - x_2'$ . Por otra parte, no existe en las

ecuaciones para las correlaciones de orden  $n$ ada que nos permita deducir la dependencia en  $x_2'$ , puesto que en el orden cero la relación entre  $x_2$  y  $x_2'$  viene dada a través de la función de respuesta infinitesimal. Como las correlaciones deben decrecer también al crecer la distancia  $x_2 - x_2'$ , proponemos para  $x_2'$  una dependencia análoga la de  $x_2$  pero de signo contrario. Así,  $F(x_2, x_2')$  tendrá la forma:

$$\text{IV-43} \quad F(x_2, x_2') = C_1 (1/f(x_2)) \exp \left[ -\gamma \left( \int dx_2 (1/f(x_2)) - \int dx_2' (1/f(x_2')) \right) \right] + (2\lambda^2/\gamma) \left[ \int dx_2 f(x_2) - \int dx_2' f(x_2') \right] + C_2.$$

Una condición física nos ha llevado a separar dos regiones al especificar la forma de la dependencia en  $x_1$ . Aplicando los mismos argumentos no podemos decir si la expresión IV-43 da la dependencia de  $Q_{22}^{(0)}$  en la dirección  $x_2$  cuando  $x_2$  es mayor que  $x_2'$  o si la da en el caso opuesto. Para decidirlo hay que determinar los valores de  $\lambda$  y de  $\gamma$ , es decir, hay que imponer condiciones iniciales y de contorno. Para esto debemos especificar  $Q_{22}^{(0)}(x, t_0; x', t')$  para todo el dominio y  $Q_{22}^{(0)}(x, t; x, t)$  para todo tiempo perteneciendo  $x$  al contorno.

Analícemos que es lo que significa un tiempo inicial  $t_0$ . No se trata de un tiempo anterior al de surgimiento de la turbulencia, puesto que la DIA, como la mayor parte de las teorías que tratan de estos problemas, está elaborada para un flujo que ya es turbulento. Se trata entonces de un instante arbitrario en el que el flujo sea ya turbulento y que se toma como instante inicial. Para conocer la condición inicial hay que conocer las correlaciones en un instante dado, lo que debido a la homogeneidad en el tiempo de nuestro problema vaciaría de sentido el cálculo de correlaciones. Desde otro punto de vista puede pensarse que la

formulación adecuada de las condiciones iniciales depende de las exigencias físicas de cada problema. En nuestro caso, la condición inicial se impondrá sobre las correlaciones de orden cero en la iteración, tomando el valor de  $\gamma$  resultante de ajustar dicha función a los valores experimentales obtenidos por Sabot y que aparecen en las figs. 2.

En la dirección  $x_1$ , la condición de contorno a imponer será  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} Q_{ij}^{(0)} = 0$ . Esto supone eliminar las constantes aditivas de IV-40. Para la dirección  $x_2$  necesitamos una condición de contorno en la frontera superior y otra en la inferior de la región logarítmica. Esto supone una gran dificultad ya que al ser la capa inercial un flujo definido asintóticamente es imposible localizar sus fronteras. Para obviarla, tomamos como límite inferior de nuestro flujo la pared. Podemos exigir que para  $x_2 = 0$  se anulen  $Q_{ij}^{(0)}$ , y esto equivale a hacer  $C_2 = 0$  en IV-43. Al hacerlo, debemos sustituir la expresión logarítmica de  $f(x_2)$  por la correspondiente a la capa viscosa para evitar la divergencia que aparecería cuando  $x_2 = 0$ . Esto debe hacerse para todos los valores de  $x_2$  inferiores a uno dado. Este valor de  $x_2$  corresponde en el experimento de Comte-Bellot a 0.2 mm. No podemos, por otro lado, establecer un valor máximo para la frontera de la parte central del canal, ya que el empalme en esta región entre los dos perfiles de flujo es mucho más suave que el existente entre la zona viscosa y la inercial. Para imponer una condición de contorno en esta frontera ajustaremos la constante  $\lambda$  teniendo en cuenta los resultados experimentales de Comte-Bellot. Los valores de  $\lambda$  y de  $\gamma$ , una vez realizada la iteración serán optimizados y comparados con los ajustados en la iteración de orden cero. Los valores obtenidos mediante estos ajustes preliminares son  $\gamma = 250 \text{ s}^{-1}$  y  $\lambda = 0.2-0.1 \text{ mm}^{-1}$ .

Con estos valores debemos decidir si, para  $x_2 > x_2'$ , la función que nos da  $Q_{22}^{(0)}$  es

$$Q_{22}^{(0)}(x, t; x', t') = C_1 (1/f(x_2)) \exp(-\lambda\rho - \gamma\tau) \times \\ \text{IV-45} \quad \times \exp \left[ \gamma \left( \int dx_2 / f(x_2) - \int dx_2' / f(x_2') \right) + (2\lambda^2 / \gamma) \left( \int dx_2 f(x_2) - \int dx_2' f(x_2') \right) \right]$$

o bien

$$Q_{22}^{(0)}(x, t; x', t') = C_1 (1/f(x_2)) \exp(-\lambda\rho - \gamma\tau) \times \\ \text{IV-46} \quad \times \exp \left[ \gamma \left( \int dx_2 / f(x_2) - \int dx_2' / f(x_2') \right) - (2\lambda^2 / \gamma) \left( \int dx_2 f(x_2) - \int dx_2' f(x_2') \right) \right]$$

Hay que tener en cuenta además que  $f(x_2)$  puede tener un coeficiente que modifique el exponente. Los valores ajustados para la ley logarítmica en los experimentos son:

$$\text{IV-47} \quad f(x_2) = U(x_2) = Ku_f \ln(x_2 u_f / \nu) + C = 800 \text{ mm/s} (2.69 \ln 57.14 x_2 + 4.5)$$

mientras que el valor encontrado para la ley de velocidad correspondiente a la capa viscosa es

$$\text{IV-48} \quad U(x_2) = 800 \times 55.2 x_2 \text{ mm/s}$$

Para simplificar la notación escribiremos a partir de ahora

$$G(x_2, x_2') = \int dx_2 / f(x_2) - \int dx_2' / f(x_2') \\ F(x_2, x_2') = \int dx_2 f(x_2) - \int dx_2' f(x_2')$$

Si sustituimos el valor dado en IV-47 para la capa logarítmica, podemos poner

$$F(x_2, x_2') = Cte (x_2 \ln x_2 - x_2' \ln x_2' - (x_2 - x_2'))$$

mientras que para  $G(x_2, x_2')$  se obtiene la llamada serie logarítmica.

Ambas expresiones son complicadas y para introducirlas dentro del término de interacción debemos sustituirlas por otras equivalentes si que-



remos tener alguna esperanza de poder realizar los cálculos. La aproximación encontrada es:

$$\begin{aligned} \text{IV-49} \quad F(x_2, x'_2) &= 800 \times 12.30 (x_2^{1.2} - x'^{1.2}_2) & 0.5 \leq x_2 \\ G(x_2, x'_2) &= (0.66/800) (x_2^{0.9} - x'^{0.9}_2) & 0.5 \leq x_2 \end{aligned}$$

En la capa viscosa, estas funciones tendrán una forma cuadrática y logarítmica respectivamente y sus coeficientes serán del mismo orden de magnitud.

De todo ello resulta que aunque  $\gamma \gg \lambda^2/\gamma$ , los coeficientes de las funciones  $F$  y  $G$  hacen que el término  $(\lambda^2/\gamma)F(x_2, x'_2)$  sea mayor que el término  $\gamma G(x_2, x'_2)$ . Para que las correlaciones decrezcan al aumentar la distancia su dependencia en  $x_2$  y en  $x'_2$  debe corresponder a IV-46 para  $x_2 > x'_2$  y a IV-45 para  $x_2 < x'_2$ . Como ya hemos hecho para la dirección  $x_1$ , redefinimos las funciones  $F$  y  $G$ . Las correlaciones entre las componentes de la velocidad en la dirección  $x_2$  vienen dadas por:

$$\text{IV-50} \quad Q_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = C_1 (1/f(x_2)) \exp(-\gamma t - \lambda \rho) \exp(\gamma G(x_2, x'_2) - (\lambda^2/\gamma) F(x_2, x'_2))$$

donde

$$\text{IV-51} \quad G(x_2, x'_2) = \int dx_2 / f(x_2) - \int dx'_2 / f(x'_2) \quad x_2 > x'_2$$

$$G(x_2, x'_2) = \int dx'_2 / f(x'_2) - \int dx_2 / f(x_2) \quad x_2 < x'_2$$

$$\text{IV-52} \quad F(x_2, x'_2) = 2 \int dx_2 f(x_2) - 2 \int dx'_2 f(x'_2) \quad x_2 > x'_2$$

$$F(x_2, x'_2) = 2 \int dx'_2 f(x'_2) - 2 \int dx_2 f(x_2) \quad x_2 < x'_2$$

Una vez conocida  $Q_{22}^{(0)}$  podemos, sustituyendo en IV-34 e integrando, encontrar  $Q_{12}^{(0)}$ :

$$\text{IV-53} \quad Q_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = C_1 (\lambda/\gamma) \exp(-\gamma t - \lambda \rho) \exp(-(\lambda^2/\gamma) F(x_2, x'_2) + \gamma G(x_2, x'_2))$$

Tomando la aproximación IV-49 para las funciones  $F$  y  $G$ , las correlaciones de orden cero obtenidas como solución del sistema IV-33 con las

condiciones de contorno elegidas aparecen representadas en las figs.4. Observe que al tomar antisimétrica la dependencia en  $x'_2$  solo en el exponente, sin utilizar una función de modulación para la  $x'_2$  análoga a la  $(1/f(x_2))$  que aparece modulando la  $x_2$ , se ha obrado con acierto. Si hubiésemos tomado en IV-44  $f(x'_2)/f(x_2)$  en lugar de  $1/f(x_2)$ , las correlaciones  $Q_{12}^{(0)}$  aparecerían moduladas exclusivamente por  $f(x'_2)$  y a esto no podemos encontrarle ningún sentido físico.

Para la función de respuesta infinitesimal encontramos dos sistemas de ecuaciones distintos, cada uno con dos ecuaciones acopladas. La aparición de las funciones delta de Dirac nos lleva a buscar la solución por un camino distinto al empleado para el sistema de ecuaciones para las correlaciones. Consideremos el segundo sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \partial_t G_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - \partial_{x_1} (U_1(\vec{x}, t) G_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) &= 0 \\ \partial_t G_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') - 2\partial_{x_1} (U_1(\vec{x}, t) G_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) - \partial_{x_2} (U_1(\vec{x}, t) G_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t')) &= \\ &= \delta(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t'). \end{aligned}$$

Una transformación exponencial de Fourier se define como

$$\bar{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(ikx) f(x)$$

y la inversa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) \bar{g}(k)$$

Aplicamos una transformación de Fourier para el tiempo y la dirección  $x_1$  a las funciones de respuesta

$$\begin{aligned} G_{12}^{(0)}(x_1, x_2, t; x'_1, x'_2, t') &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-i\omega t) \exp(-ikx) G_{12}^{(0)}(k, \omega, x_2, x'_2) \\ G_{22}^{(0)}(x_1, x_2, t; x'_1, x'_2, t') &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-i\omega t) \exp(-ikx) G_{22}^{(0)}(k, \omega, x_2, x'_2) \end{aligned}$$

Si aplicamos la transformación a las ecuaciones del sistema anterior,

y dividimos por  $\exp(-i\tau\omega)\exp(-i\rho k)$  resulta un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} -i\omega G_{12}^{(0)}(k, \omega, x_2, x_2') + ikf(x_2)G_{22}^{(0)}(k, \omega, x_2, x_2') &= 0 \\ -i\omega G_{22}^{(0)}(k, \omega, x_2, x_2') + 2ikf(x_2)G_{12}^{(0)}(k, \omega, x_2, x_2') - f(x_2)\partial_{x_2}G_{22}^{(0)}(k, \omega, x_2, x_2') - \\ &\quad - f'(x_2)G_{22}^{(0)}(k, \omega, x_2, x_2') = \delta(x_2 - x_2') \end{aligned}$$

Este sistema se reduce a una ecuación diferencial inhomogénea

$$\begin{aligned} \partial_{x_2}G_{22}^{(0)}(k, \omega, x_2, x_2') + \{(i\omega/f(x_2)) - (2ik^2/\omega)f(x_2) + (f'(x_2)/f(x_2))\}G_{22}^{(0)}(k, \omega, x_2, x_2') = \\ = -(1/f(x_2))\delta(x_2 - x_2') \end{aligned}$$

Una solución particular de esta ecuación es:

$$G_{22}^{(0)}(k, \omega, x_2, x_2') = \text{cte.} \cdot (-1/f(x_2)) \exp(-i\omega G(x_2, x_2') + (2ik^2/\omega)F(x_2, x_2'))$$

Efectuando la transformación inversa obtenemos (39):

$$\begin{aligned} \text{IV-54} \quad G_{22}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= K_1 (1/f(x_2)) (1/F(x_2, x_2'))^{1/2} \times \\ &\times \{ \tau + (G(x_2, x_2') + \rho^2/4F(x_2, x_2')) \}^{-3/2} . \end{aligned}$$

Sustituyendo esta función en IV-33c e integrando obtenemos:

$$\text{IV-55} \quad G_{12}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = 2K_1 (\rho/F^{3/2}(x_2, x_2')) \{ \tau + (G(x_2, x_2') + \rho^2/4F(x_2, x_2')) \}^{-3/2}$$

Procediendo de igual forma para el primer sistema

$$\begin{aligned} \partial_t G_{11}^{(0)} - f(x_2)\partial_{x_1}G_{21}^{(0)} &= \delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2')\delta(t - t') \\ \partial_t G_{21}^{(0)} - 2f(x_2)\partial_{x_1}G_{11}^{(0)} - f(x_2)\partial_{x_2}G_{21}^{(0)} - f'(x_2)G_{21}^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos

$$\text{IV-56} \quad G_{21}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = K_2 (1/f(x_2)) (\rho/F^{3/2}(x_2, x_2')) \{ \tau + (G(x_2, x_2') + \rho^2/4F(x_2, x_2')) \}^{-3/2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV-57} \quad G_{11}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= K_2/2 \left( \rho/F^{3/2}(x_2, x_2') \right) \left( \tau + (G(x_2, x_2') + \rho^2/4F(x_2, x_2')) \right)^{-3/2} - \\
 &- 2K_2 \left( 1/F^{3/2}(x_2, x_2') \right) \left( \tau + (G(x_2, x_2') + \rho^2/4F(x_2, x_2')) \right)^{-1/2} + \\
 &+ H(t-t') \delta(x_1 - x_1') \delta(x_2 - x_2') .
 \end{aligned}$$

$H(t-t')$  es la función escalón:

$$\begin{aligned}
 H(t-t') &= 1, \quad t \geq t' \\
 &= 0, \quad t < t'
 \end{aligned}$$

Las funciones de respuesta infinitesimal en la aproximación de orden cero se hallan representadas en la fig. 4c .

#### RESOLUCIÓN DEL SISTEMA PARA EL PRIMER ORDEN EN LA ITERACIÓN

Para el primer orden en la iteración tenemos el siguiente sistema

IV-57

$$\begin{aligned}
 \text{a.-} \quad \partial_t Q_{11} - \partial_{x_1} (f(x_2) Q_{21}) &= -(1/2) P_{121}(\nabla_x) S_{211}^{(0)} - (1/2) P_{112}(\nabla_x) S_{121}^{(0)} - (1/2) P_{122}(\nabla_x) S_{221}^{(0)} \\
 \text{b.-} \quad \partial_t Q_{21} - 2\partial_{x_1} (f(x_2) Q_{11}) - \partial_{x_2} (f(x_2) Q_{21}) &= -(1/2) P_{211}(\nabla_x) S_{111}^{(0)} - (1/2) P_{212}(\nabla_x) S_{121}^{(0)} \\
 &- (1/2) P_{221}(\nabla_x) S_{211}^{(0)} \\
 \text{c.-} \quad \partial_t Q_{12} - \partial_{x_1} (f(x_2) Q_{22}) &= -(1/2) P_{121}(\nabla_x) S_{212}^{(0)} - (1/2) P_{112}(\nabla_x) S_{122}^{(0)} - (1/2) P_{122}(\nabla_x) S_{222}^{(0)} \\
 \text{d.-} \quad \partial_t Q_{22} - 2\partial_{x_1} (f(x_2) Q_{12}) - \partial_{x_2} (f(x_2) Q_{22}) &= -(1/2) P_{211}(\nabla_x) S_{112}^{(0)} - (1/2) P_{212}(\nabla_x) S_{122}^{(0)} - \\
 &- (1/2) P_{221}(\nabla_x) S_{212}^{(0)}
 \end{aligned}$$

donde los términos de interacción  $S_{jmn}^{(0)}$  vienen dados por

$$\begin{aligned}
 \text{IV-58} \quad S_{jmn}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') &= - \int d\vec{y} \left[ \int_{t_0}^t ds G_{ja}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, t') P_{abc}(\nabla_y) (Q_{nb}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, t') Q_{nc}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, t')) \right. \\
 &+ \int_{t_0}^t ds G_{ma}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) P_{abc}(\nabla_y) (Q_{jb}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) Q_{nc}^{(0)}(\vec{x}', t'; \vec{y}, s)) + \\
 &\left. + \int_{t_0}^t ds G_{na}^{(0)}(\vec{x}', t'; \vec{y}, s) P_{abc}(\nabla_y) (Q_{jb}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, s) Q_{nc}^{(0)}(\vec{x}, t; \vec{y}, s)) \right]
 \end{aligned}$$

Como origen de tiempos para la interacción se tomará  $t = -\infty$ . Cada uno de los  $S_{ijk}$  incluye 16 sumandos, de los cuales cuatro son idénticamente nulos. Utilizando propiedades de simetría tensorial los restantes se pueden reducir a cuatro. Si introducimos para los términos  $P_{ijk}$  la expresión aproximada obtenida utilizando las consideraciones de la pag. y las soluciones encontradas para el orden cero de las correlaciones y de la función de respuesta infinitesimal, a partir de IV-58 se obtiene definiendo las funciones auxiliares

$$\text{IV-59} \quad T(x_2, x'_2) = \exp\left\{-\left(\lambda^2/\gamma\right) \left(2\int dx_2 f(x_2) + 2\int dx'_2 f(x'_2)\right) + \gamma\left(\int dx_2/f(x_2) + \int dx'_2/f(x'_2)\right)\right\}$$

$$\text{IV-60} \quad T(x_2) = \exp\left\{-\left(\lambda^2/\gamma\right) 4\int dx_2 f(x_2) + 2\gamma\int dx_2/f(x_2)\right\}$$

$$S(n, \tau, x_1) = \exp(-n\tau - nx_1)$$

$$R(n, x_2, x'_2) = \exp\left\{-n\left(\lambda^2/\gamma\right) F(x_2, x'_2) + \gamma n G(x_2, x'_2)\right\}$$

$$\text{IV-61} \quad S_{111}^{(0)} =$$

$$= T(x_2, x'_2) \Lambda \left[ \{H\Gamma A + J(D - 2\Gamma^2 E)\} + 2\{F\Gamma B + 2E(F - 2\Gamma^2 G)\} - 4\{H\Gamma C + 2J(H - 2\Gamma I)\} \right] +$$

$$+ T(x_2) S(2, x_2, x'_2) \Lambda \left[ \{H\Gamma A^* + J(D^* - 2\Gamma^2 E^*)\} + 2\{F\Gamma B^* + 2E(F^* - 2\Gamma^2 G^*)\} - 4\{H\Gamma C^* + 2J(H^* - 2\Gamma I^*)\} \right]$$

$$+ S(1, \tau, x_1) R(1, x_2, x'_2) (2\Lambda/\gamma^2) \left[ 2CD\lambda + \gamma D^2/f(x_2) - 2D^2\lambda^2 f(x_2) \right]$$

$$+ S(2, \tau, x_1) R(2, x_2, x'_2) (\Lambda/\gamma^2) \left[ 2CD\lambda + \gamma D^2/f(x'_2) - 2D^2\lambda^2 f(x'_2) \right]$$

$$\text{IV-62} \quad S_{112}^{(0)} =$$

$$= T(x_2, x'_2)/f(x_2) \left[ \{E\Lambda A + 2J(\lambda D - 2\Lambda\Gamma E)\} + \{2E\Lambda B + 8E(\gamma F - 2\Lambda G)\} - 4\{H\Lambda C + 2J(\lambda H - 2\Lambda\Gamma I)\} \right]$$

$$+ S(2, \tau, x_1) T(x'_2) \left[ \begin{aligned} & 2S(1, \tau, x_1) R(1, x_2, x'_2) (CD\Lambda/f(x'_2) + \lambda D^2/(f(x_2)f(x'_2)) - \\ & - 2D^2\Lambda\Gamma f(x_2)/f(x'_2)) + \\ & + S(2, \tau, x_1) R(2, x_2, x'_2) (CD\Gamma^2/f(x_2) + D^2\lambda/(f(x_2)f(x'_2)) - 2D^2\Lambda\Gamma f(x'_2)/f(x_2)) \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
\text{IV-63 } S_{121}^{(0)} &= \\
&= 2T(x_2, x_2')/f(x_2) [ \{ (I+H) \Lambda A + 2J(\lambda D - 2\Lambda \Gamma E) \} - 4 \{ (CD + D^2) \Lambda B + 4E(\lambda F - 2\Lambda \Gamma G) \} ]_{63} + \\
&+ S(2, \tau, x_1) T(x_2) [ * ]_{63} + \\
&+ S(1, \tau, x_1) R(1, x_2, x_2') [ CD\Gamma^2/f(x_2') + D^2/(f(x_2)f(x_2')) - 2D^2\Gamma^2 f(x_2)/f(x_2') ] \\
&+ S(2, \tau, x_1) R(2, x_2, x_2') [ CD\Gamma^2/f(x_2) + D^2\lambda/(f(x_2)f(x_2')) - 2D^2\Lambda \Gamma f(x_2')/f(x_2) ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV-64 } S_{122}^{(0)} &= 2T(x_2, x_2')/(f(x_2)f(x_2')) \times \\
&\times [ \{ E\lambda A + 2J(\gamma D - 2\Lambda E) \} + 4 \{ F\lambda B + E(\gamma F - 2\Lambda G) \} - 4 \{ EC + 2J(\gamma H - 2\lambda^2 I) \} ]_{64} + \\
&+ T(x_2) S(1, \tau, x_1) [ * ]_{64} + \\
&+ (S(1, \tau, x_1) R(1, x_2, x_2')/f(x_2)f(x_2')) [ \Gamma CD + D^2/f(x_2) - 4\Gamma^2 f(x_2) ] + \\
&+ (S(2, \tau, x_1) R(2, x_2, x_2')/f^2(x_2)) [ \Gamma CD + 2D^2/f(x_2') - 4\Gamma^2 f(x_2') ] .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV-65 } S_{211}^{(0)} &= \\
&= (2T(x_2, x_2')/f(x_2)) [ 2\Lambda \Gamma H B + 2\Lambda \Gamma^2 J G + 2\Lambda \{ F \Gamma K + 2E(L - 2\Gamma^2 M) \} ]_{65} + \\
&+ (S(1, \tau, x_2) T(x_2)/f(x_2)) [ * ]_{65} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV-66 } S_{212}^{(0)} &= \\
&= 2(T(x_2, x_2)/f(x_2)f(x_2')) [ \{ 2H\Lambda B + 4J(\lambda F - \Lambda \Gamma G) \} + 2E \{ \Lambda K + 4(\lambda L - 2\Lambda \Gamma M) \} ]_{66} + \\
&+ (S(1, \tau, x) T(x)/f(x')) [ * ]_{66} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV-67 } S_{221}^{(0)} &= \\
 &= 2(T(x_2, x_2')/f^2(x_2)) [2\{HAB+4J(\gamma F-2\Lambda G)\}+2\{FAK+4E(\lambda L-2\Lambda M)\}]_{67} + \\
 &+ (S(2, \tau, x) T(x)/f(x) f(x')) [ * ]_{67} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV-68 } S_{222}^{(0)} &= \\
 &= 2(T(x_2, x_2')/f^2(x_2) f(x_2')) [2\{HAB+4J(F-2\Lambda G)\}+2E\{\lambda K+2(\gamma L-2\Lambda M)\}]_{68} + \\
 &+ (S(2, \tau, x_1) T(x_2)/f(x_2) f^2(x_2')) [ * ]_{68} .
 \end{aligned}$$

En estas fórmulas hemos introducido por simplicidad de notación varios símbolos que engloban a diferentes combinaciones de las constantes que han aparecido anteriormente. Las relaciones son:

$$\begin{aligned}
 C &= C_1 & G &= K_1 C_2^2 & A &= \lambda^2/\gamma \\
 D &= C_2 & H &= K_2 C_1 C_2 & \Gamma &= \lambda/\gamma \\
 E &= K_1 C_1 C_2 & I &= K_2 C_1^2 \\
 F &= K_1 C_1^2 & J &= K_2 C_2^2
 \end{aligned}$$

Por otro lado, las letras  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, L$ , y  $M$  designan ciertas integrales cuyas expresiones escribimos a continuación. Los paréntesis rectos que incluyen un asterisco, \*, se obtienen de los paréntesis rectos con su mismo número substituyendo exclusivamente los símbolos en cursiv que acabamos de indicar por los correspondientes  $A^*, B^*, \dots$ .

$$\text{IV-69 } A = \int dy_2 I_{x_1}^{21} T(-y_2) F^{-5/2}(x_2, y_2)$$

$$\text{IV-70 } B = \int dy_2 I_{x_1}^{11} T(-y_2) F^{-3/2}(x_2, y_2)$$

$$\begin{aligned}
\text{IV-71} \quad C &= \int dy_2 I_{x_1}^{02T}(-y_2) F^{-3/2}(x_2, y_2) \\
\text{IV-72} \quad D &= \int dy_2 I_{x_1}^{21T}(-y_2) f^{-1}(y_2) F^{-5/2}(x_2, y_2) \\
\text{IV-73} \quad E &= \int dy_2 I_{x_1}^{21T}(-y_2) f(y_2) F^{-5/2}(x_2, y_2) \\
\text{IV-74} \quad F &= \int dy_2 I_{x_1}^{11T}(-y_2) f^{-1}(y_2) F^{-3/2}(x_2, y_2) \\
\text{IV-75} \quad G &= \int dy_2 I_{x_1}^{11T}(-y_2) f(y_2) F^{-3/2}(x_2, y_2) \\
\text{IV-76} \quad H &= \int dy_2 I_{x_1}^{02T}(-y_2) f^{-1}(y_2) F^{-3/2}(x_2, y_2) \\
\text{IV-77} \quad I &= \int dy_2 I_{x_1}^{02T}(-y_2) f(y_2) F^{-3/2}(x_2, y_2) \\
\text{IV-78} \quad K &= \int dy_2 I_{x_1}^{01T}(-y_2) f^{-1}(y_2) F^{-1/2}(x_2, y_2) \\
\text{IV-79} \quad L &= \int dy_2 I_{x_1}^{01T}(-y_2) f(y_2) F^{-1/2}(x_2, y_2) \\
\text{IV-80} \quad M &= \int dy_2 I_{x_1}^{01T}(-y_2) f(y_2) F^{-1/2}(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

Los términos  $I_{x_1}^{ij}$  representan integrales respecto a  $y_1$ :

$$\begin{aligned}
\text{IV-81} \quad I_{x_1}^{21} &= \int dy_1 \exp(-\lambda x_1 + 2\lambda y_1) \rho_{y_1}^2 I_t^1 \\
\text{IV-82} \quad I_{x_1}^{11} &= \int dy_1 \exp(-\lambda x_1 + 2\lambda y_1) \rho_{y_1} I_t^1 \\
\text{IV-83} \quad I_{x_1}^{01} &= \int dy_1 \exp(-\lambda x_1 + 2\lambda y_1) I_t^1 \\
\text{IV-84} \quad I_{x_1}^{02} &= \int dy_1 \exp(-\lambda x_1 + 2\lambda y_1) I_t^2
\end{aligned}$$

Por analogía con  $\rho_{x_1}, \rho_{y_1}$  se define como

$$\begin{aligned}
\text{IV-85} \quad \rho_{y_1} &= x_1 - y_1 & x_1 > y_1 \\
&= y_1 - x_1 & x_1 < y_1
\end{aligned}$$



Las  $I_t^n$  corresponden a las integrales en el tiempo:

$$\text{IV-86} \quad \int_{-\infty}^t ds \exp(-\gamma t + 2\gamma s) \{ (t-s) + G(x_2, y_2) + \rho_{y_1}^2 / 4F(x_2, y_2) \}^{-1/2} = I_t^1$$

$$\text{IV-87} \quad \int_{-\infty}^t ds \exp(-\gamma t + 2\gamma s) \{ (t-s) + G(x_2, y_2) + \rho_{y_1}^2 / 4F(x_2, y_2) \}^{-1/2} = I_t^2$$

Los símbolos con asterisco \* corresponden a integrales en el tiempo de la siguiente forma:

$$\text{IV-88} \quad I_t^{*1} = \int_{-\infty}^0 ds e^{2\gamma s} \{ -s + G(x_2', y_2) + \rho_{y_1'}^2 / 4F(x_2', y_2) \}^{-1/2}$$

$$\text{IV-89} \quad I_t^{*2} = \int_{-\infty}^0 ds e^{2\gamma s} \{ -s + G(x_2', y_2) + \rho_{y_1'}^2 / 4F(x_2', y_2) \}^{-1/2} .$$

En estas expresiones,  $\rho_{y_1'}$  es

$$\begin{aligned} \rho_{y_1'} &= x_1' - y_1 & x_1' > y_1 \\ &= y_1 - x_1' & x_1' < y_1. \end{aligned}$$

Cuando estas integrales en el tiempo se introducen en el término de interacción, aparecen las correspondientes integrales con asterisco

para  $y_1$

$$\text{IV-90} \quad I_{x_1}^{*12} = \int dy_1 e^{-2\gamma y_1} | -y_1 |^2 I_t^{*1}$$

$$\text{IV-91} \quad I_{x_1}^{*11} = \int dy_1 e^{-2\gamma y_1} | -y_1 | I_t^{*1}$$

$$\text{IV-92} \quad I_{x_1}^{*01} = \int dy_1 e^{-2\gamma y_1} I_t^{*1}$$

$$\text{IV-93} \quad I_{x_1}^{*22} = \int dy_1 e^{-2\gamma y_1} | -y_1 |^2 I_t^{*2}$$

$$\text{IV-94} \quad I_{x_1}^{*21} = \int dy_1 e^{-2\gamma y_1} |-y_1| I_t^{*2}$$

$$\text{IV-95} \quad I_{x_1}^{*02} = \int dy_1 e^{-2\gamma y_1} I^{*2}$$

Para obtener por ejemplo  $Q_{22}^{(1)}$  directamente a partir de IV-57 hacemos

$$\text{IV-96} \quad A(x_1, x'_1, x_2, x'_2, t-t') = -(1/2)P_{121}S_{212} - (1/2)P_{112}S_{122} - (1/2)P_{122}S_{222}$$

$$\text{IV-97} \quad B(x_1, x'_1, x_2, x'_2, t-t') = -(1/2)P_{211}S_{112} - (1/2)P_{212}S_{122} - (1/2)P_{221}S_{212}$$

Si en IV-57: se deriva con respecto a  $x_1$  y en IV-57d con respecto a  $t$ , y teniendo en cuenta IV-96 y 97, podemos escribir:

$$\text{IV-98} \quad \partial_x \partial_t Q_{12} = \partial_{x_1} A(x_1, x'_1, x_2, x'_2, t-t') + \partial_{x_1}^2 (f(x_2) Q_{22})$$

$$\text{IV-99} \quad \partial_t^2 Q_{22} - 2(f(x_2)(\partial_{x_1} A + \partial_{x_1}^2 (f(x_2) Q_{22})) - \partial_{x_2} \partial_t (f(x_2) Q_{22})) = \partial_t B$$

La ecuación IV-99 es una ecuación integro diferencial para la correlación transversal  $Q_{22}$  que podemos escribir de otra forma:

$$\text{IV-100} \quad (\partial_t - 2f^2(x_2) \partial_{x_1}^2 - f(x_2) \partial_t \partial_{x_2} - f'(x_2) \partial_t) Q_{22} = 2f(x_2) \partial_{x_1} A + \partial_t B$$

Como para el primer orden de la iteración la función de Green correspondiente es  $G_{22}^{(0)}$ ,  $Q_{22}^{(1)}$  puede expresarse por:

$$\text{IV-101} \quad Q_{22}^{(1)} = \int G_{22}^{(0)} (2f(x_2) \partial_{x_1} A + \partial_t B)$$

y sustituyendo A y B por sus expresiones explícitas

$$\text{IV-102} \quad Q_{22}^{(1)} = 5 \int G_{22}^{(0)} [(2f(x_2) \partial_{x_1} + \partial_t \partial_{x_1}) S_{212}^{(0)} + 4f(x_2) \partial_{x_1} \partial_{x_2} S_{222}^{(0)} + (2f(x_2) \partial_{x_1} + \partial_t \partial_{x_1}) S_{122}^{(0)} + 2\partial_t \partial_{x_1} S_{112}^{(0)}]$$

Resulta evidente de la complejidad de IV-102 que el cálculo de las correlaciones en la aproximación de orden 1 no puede ser abordado numéricamente en forma directa. Proponemos entonces la siguiente línea metodológica: Se intentará abordar analíticamente los primeros cálculos; si las funciones a integrar fuesen excesivamente complicadas se ajustarán por otras más sencillas. Solo al final, cuando la complejidad del cálculo lo haga inabordable analíticamente, se procederá al cálculo numérico utilizando una computadora grande. Llamaremos  $\Sigma(\vec{x}, \vec{x}', t, t')$  al término que aparece como factor de  $G_{22}^{(0)}$  en la integral en IV-102.

Debido al número de sumandos que intervienen en esta expresión, no es posible intentar un cálculo analítico sin antes tratar de determinar el orden de magnitud relativa de los distintos sumandos. Para ello hay que tener en cuenta, i) los coeficientes que multiplican a los  $S_{ijn}$  como consecuencia de los operadores de derivación que actúan sobre ellos. ii) Dentro de  $S_{ijn}$ , los factores numéricos que multiplican a las integrales  $A, B, \dots$ , como pueden ser  $\lambda^2/\gamma$ , o los coeficientes que ajustan las funciones  $F(x_2, x'_2)$  o  $G(x_2, x'_2)$ . iii) Los ordenes de magnitud relativos de las integrales  $A, B, \dots$ .

Comencemos por estos últimos. Acotamos las exponenciales por la unidad y normalizamos las constantes de integración. Al utilizar el signo  $\approx$  entre dos expresiones queremos decir que ambas son del mismo orden de magnitud.

$$A \approx \int dy_2 I^{21} F^{-1/2}, \quad B \approx \int dy_2 I^{11} F^{-3/2}, \quad C \approx \int dy_2 I^{02} F^{-1/2}, \quad K \approx \int dy_2 I^{01} F^{-1/2}.$$

Teniendo en cuenta los órdenes de magnitud elegidos para los parámetros  $\lambda$  y  $\gamma$ , y los coeficientes de las funciones  $F$  y  $G$ , se puede estimar para

los integrandos

$$\begin{aligned} \text{IV-103 } I^{21} &\approx \int dy_1 |x_1 - y_1|^2 (G + |x_1 - y_1|^2 / F)^{-3/2} \approx G^{-3/2} \int d\rho \rho^2 (1 + \rho^2 / 4FG)^{-3/2} \approx \\ &\approx -^{3/2} \int dx (\sqrt{4FG} - 4FG x^2) / \sqrt{(1+x^2)^3} \approx 8F^{3/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV-104 } I^{11} &\approx \int dy_1 |x_1 - y_1| / (G + |x_1 - y_1|^2 / 4F)^{3/2} \approx G^{3/2} \int dx \sqrt{4FG} x / (1+x^2)^{3/2} \approx \\ &\approx 2G\sqrt{F} \end{aligned}$$

$$\text{IV-105 } I^{01} \approx \int dy_1 (G + \rho^2 / 4F)^{-3/2} \approx G^{3/2} \int dx \sqrt{4FG} (1+x^2)^{-3/2} \approx G\sqrt{F}$$

$$\text{IV-106 } I^{02} \approx \int dy_1 (G + \rho^2 / 4F)^{-1/2} \approx G^{-1} \int dx \sqrt{4FG} (1+x^2)^{-1/2} \approx 2\sqrt{F}$$

y sustituyendo en las integrales a  $y_2$

$$\text{IV-107 } A \approx 8F^{3/2} F^{-3/2} = 8/F \approx 8 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{IV-108 } B \approx 4(FG)^{-1/2} \approx 4.5$$

$$\text{IV-109 } C \approx 1/F \approx 10^{-4}$$

$$\text{IV-110 } K \approx 2/\sqrt{G} \approx 2 \cdot 10^4$$

Los términos  $F$  y  $G$  aparecen cuando  $B$  se deriva con respecto a  $x_2$

$$\text{IV-111 } (4(\lambda^2/\gamma)G - 2\gamma F) \approx (4(\lambda^2/\gamma)\text{coef}(G) - 2\gamma\text{coef}(F))B \approx 6.5B$$

De igual forma están relacionados  $D$  y  $E$  con  $A$ , y  $L$  y  $M$  con  $K$ .

$$\text{IV-112 } (2(\lambda^2/\gamma)M - \gamma L) \approx 6.5K$$

Teniendo en cuenta lo expuesto, los términos  $S_{ijn}$  pueden estimarse como

$$\begin{aligned} S_{212}^{(0)} &\approx 2/f^2 \{ (\lambda^2/\gamma)B + 2(\lambda/\gamma)(\gamma F - 2(\lambda^2/\gamma)G) + (\lambda^2/\gamma)K + 2(\lambda/\gamma)(\gamma L - 2\lambda^2/\gamma M) \} + \\ &+ \text{términos de orden inferior} \approx 26 (\lambda/\gamma^2 f^2) K \end{aligned}$$



$$S_{222}^{(0)} = (2/f^3) (2\lambda B + 4 \cdot 6.5B + 2\lambda K + 4 \cdot 6.5 K) (52/f^3) K$$

$$S_{122}^{(0)} = (2/f^2) 13 B$$

$$S_{112}^{(0)} = (2/f) 26 B$$

En esta estimación, los términos  $A$  y  $C$  y los que están relacionados con ellos como  $D, E$  etc, no aparecen al ser pequeños en comparación con  $B$  y con  $K$ . Por las mismas razones hemos prescindido de los términos con asterisco \*,  $A^*, B^*$ , etc, que, lo mismo que los dos últimos sumandos de IV-61, 62, 63, y 64, van multiplicados por exponenciales de decrecimiento muy rápido.

Finalmente, para poder determinar la magnitud relativa de los sumandos debemos tener en cuenta las derivadas que operan sobre cada  $S_{ijn}^{(0)}$ :

$$a) (f \partial_{x_1}^2 + \partial_t \partial_{x_2}) S_{212}^{(0)} = 10^3 \cdot 10^{-10} K = 10^{-7} K = 2.6 \cdot 10^{-3}$$

$$b) (2f \partial_{x_1} \partial_{x_2}) S_{222}^{(0)} = 1.1 \cdot 10^4 \cdot 2.9 \cdot 10^{-11} K = 7.6 \cdot 10^{-3}$$

$$c) (f \partial_{x_1} + \partial_t \partial_{x_2}) S_{122}^{(0)} = 10^3 \cdot 1.7 \cdot 10^{-7} B = 7.9 \cdot 10^{-4}$$

$$d) (2 \partial_t \partial_{x_1}) S_{112}^{(0)} = 7.5 \cdot 10 \cdot 4.2 \cdot 10^{-3} B = 1.4$$

El término  $c$  es despreciable frente a los otros y la razón  $(a+b)/d$  es  $1.4 \cdot 10^{-2}$ . Podemos suponer pues que el error cometido al tomar para el término de interacción solamente el sumando  $d$  es pequeño.

$$IV-113 \quad Q_{22}^{(1)} = \int G_{22}^{(0)} \partial_t \partial_{x_1} S_{112}^{(0)}$$

Para calcular  $Q_{22}^{(1)}$  hemos de empezar calculando  $B$ . Esta integral está

definida en IV-70. El cálculo de la integral al tiempo puede realizarse analíticamente y está detallado en el Apendice 3.

La integral  $I_t^1$  se define como

$$I_t^1 = \int_{-\infty}^t ds G(t-s) Q(t-s) Q(t'-s)$$

Como el problema es estacionario podemos hacer  $t' = 0$ . En la integral, de acuerdo con lo dicho en el análisis de la resolución del sistema de ecuaciones, habrá que distinguir dos partes. Una corresponde al intervalo  $(-\infty, 0)$  y otra a  $(0, t)$ . La dependencia de  $Q(t-s)$  será siempre de la forma  $\exp(-\gamma(t-s))$  pero en la dependencia de  $Q(-s)$  tomaremos para la primera región  $\exp(\gamma s)$  y  $\exp(-\gamma s)$  para la segunda, ya que las correlaciones deben satisfacer la condición de decrecimiento con el tiempo. El resultado de la integración es:

$$\begin{aligned} \text{IV-114} \quad I_t^1 = & 2 \exp(-\gamma t) / [G(x_2, x_2') + \rho^2 / 4F(x_2, x_2')]^{1/2} - \\ & - 2\sqrt{2\gamma\pi} \exp(\gamma(t+2(G+\rho^2/4F))) \operatorname{erfc}(\sqrt{2\gamma(t+G+\rho^2/4F)}) \end{aligned}$$

Igualmente, y teniendo en cuenta la definición dada de  $\rho(x_1)$ , debemos distinguir tres regiones para la integral a  $y_1$  correspondientes a los intervalos  $(-\infty, 0)$ , en que aparecerá  $\exp(-\lambda x_1 + 2\lambda y_1)$ ,  $(0, x_1)$  en donde ahora aparece  $\exp(-\lambda x_1)$  y  $(x_1, \infty)$  en donde debemos poner  $\exp(-\lambda x_1 - 2\lambda y_1)$ . Los cálculos para la integral a  $y_1$  son menos directos que en el caso anterior. Es necesario en algunos casos sustituir funciones complicadas por otras mas sencillas ajustadas a aquellas, siendo estos ajustes muy buenos en general (con un error máximo del 10% y un error medio del 5%). Estos ajustes y cálculos se encuentran detallados en el Apéndice 4.

Por la forma funcional del perfil medio de velocidades y de las correlaciones para el orden cero de la iteración, a partir de la integral a  $y_1$  van a salir dos funciones que consideramos características de nuestro problema. En el término de interacción aparecen integrales extendida a productos de las siguientes funciones: i) Logaritmos (ley de las velocidades medias). ii) Funciones irracionales (a partir de la función de Green). iii) Exponenciales (a partir de las correlaciones de orden cero) En las primitivas del producto de estos factores aparecen "funciones de error" y "exponenciales integrales".

La "función de error" está definida como

$$\text{erf}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z dt e^{-t^2}.$$

En nuestro cálculo aparece con mas frecuencia la "función complementaria de error", definida como

$$\text{erfc}(z) = 1 - \text{erf}(z).$$

La "exponencial integral" se define como:

$$E_1(z) = \int_z^\infty dt e^{-t}/t$$

Estas funciones definidas mediante integrales presentan el problema a la hora de introducirlas a su vez bajo el signo de integración, de que sus primitivas no tienen formas analíticas simples, sino que vienen expresadas mediante series. Como la utilización de series, al tener que integrar y derivar repetidas veces productos de las mismas, es muy engorroso, hemos encontrado dos aproximaciones muy buenas para ellas.

$$E_1(z) \approx 1.162 z^{-1/4} \exp(-1.24 z)$$

$$\text{erfc}(z) \approx (1/\sqrt{\pi}) e^{-z} ((1 - e^{-\sqrt{\pi} z}) / z)$$

A partir de los resultados de la integración a  $y_1$  realizamos la última integral necesaria para el cálculo del término  $B$ . Como en las integraciones anteriores tendremos aquí que distinguir también tres regiones. En este caso no se puede seguir el procedimiento utilizado para la integral a  $y_1$ , hacer  $x'_1 = 0$ . Tenemos pues que fijar de alguna forma la posición de  $x'_2$  con respecto a  $x_2$ , lo que haremos suponiendo  $x'_2 < x_2$ . Esta determinación no influirá en los resultados del cálculo. Separaremos para la integración los intervalos  $(0, x'_2)$ ,  $(x'_2, x_2)$  y  $(x_2, l)$  donde  $l$  es el límite de la capa logarítmica hacia el centro del canal. En cada uno de estos intervalos tendremos que reconsiderar el signo de la exponencial que da la dependencia de las correlaciones en  $x_2, y_2$  ó en  $x'_2, y_2$ . Estos cálculos y la forma funcional obtenida para  $B$  se detallan en el apéndice 5.

En este punto nos encontramos con dos grandes dificultades. Por un lado hemos estado ignorando hasta ahora el problema que supone determinar cual es el límite superior de la capa logarítmica  $l$  y qué valor hay que dar a las correlaciones cuando  $y_2 = l$ . Además, cuando en la integración a  $y_2$  hacemos  $y_2 = 0$  en una expresión en la que aparecen exponenciales integrales encontramos dos sumandos de la forma  $\ln(0)$  que producen divergencias.

1) El problema de la condición de contorno para  $x_2 = l$ . A las correlaciones de orden cero se les impone la condición de contorno cuando  $x_2$  es igual al límite  $l$ , determinando el exponente  $\lambda$  de decrecimiento en el espacio mediante ajuste con los valores experimentales de C-B. Para el término de interacción precisamos en la integración a  $y_2$  conocer el valor de las correlaciones para todo el contorno de  $x_2 = l$ . Puesto que la posibilidad de dar valores numéricos en tal caso vaciaría nuestro cálculo



de sentido, vamos a analizar la importancia y el significado que dichos valores numéricos pueden tener.

Aunque la transición entre la capa viscosa próxima a la pared y la logarítmica se realiza mediante un empalme suave, ante las representaciones gráficas correspondientes se puede establecer un entorno de puntos en los que dicha transición tiene lugar. Esto no es posible para el límite  $\lambda$ . El acoplo entre la ley logarítmica y la ley deficitaria de velocidades (parabólica) que corresponde a la zona central del canal, es tal que, salvo en las regiones inmediatas al eje es casi imposible determinar en las representaciones gráficas si la ley de velocidad media es logarítmica o parabólica. (vease Fig.1). De esto puede concluirse que los valores  $\lambda$  a imponer a las correlaciones en el límite (hipotético) de la región logarítmica influirán muy poco en la forma funcional de éstas, ya que estos valores, en forma de una constante sustractiva, van a modificar únicamente la magnitud de las correlaciones, lo que en nuestro caso, en que tratamos de comparar con resultados experimentales en los que las correlaciones están siempre normalizados a la unidad, carece de importancia. Prescindiremos pues de estos términos.

ii) El problema de las divergencias. Las divergencias que aparecen en el límite  $y_2 = 0$  son consecuencia de la utilización de funciones con exponentes fraccionarios negativos como funciones de Green del tipo  $G(\vec{x}, \vec{x}') = (\vec{x} - \vec{x}')^{-\nu}$  donde  $\nu$  es un número fraccionario. Existe sin embargo la posibilidad de evitar estas divergencias considerando la teoría de las partes finitas.

La posibilidad de obtener la solución de una ecuación lineal no homogénea  $L\psi(x) = f(x)$  mediante la función de Green o solución fundamental

de la ecuación  $LG(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x}, \vec{x}')$  se basa en la aplicación de la fórmula de Green:

$$\text{IV-115} \quad \int_D dV_{\vec{x}} \{ (L\psi(\vec{x}))G(\vec{x}, \vec{x}') - \psi(\vec{x}) (LG(\vec{x}, \vec{x}')) \} - \int_{\Gamma D} d\sigma_Y \partial_{n_Y} \psi(\vec{x}) G(\vec{x}, \vec{x}') - \psi(\vec{x}_Y) \partial_{n_Y} G(\vec{x}_Y, \vec{x}') = 0.$$

donde  $D$  es el dominio en el que se busca la solución de la ecuación,  $\Gamma D$  es el contorno de dicho dominio y el subíndice  $Y$  denota pertenencia a  $\Gamma D$ .

En el caso de que  $G(x, x')$  no sea integrable (como en nuestro caso) podemos separar en cada integral la parte finita, definida para integrales simples como:

$$\text{IV-116} \quad \text{p.f.} \int_a^b dx A(x) / (b-x)^{p+v} = \lim_{x \rightarrow b} \left( \int_a^x dx A(x) / (b-x)^{p+v} + B(x) / (b-x)^{p-1+v} \right)$$

donde  $p$  es entero,  $v \in (0, 1)$ ,  $B(x)$  es una función lipschitziana que además cumple  $B(b) = -2A(b)$ , y una parte infinita. Para integrales múltiples se utiliza el teorema de Fubini, (40).

De acuerdo con esto se puede escribir la fórmula de Green como:

IV-117

$$\text{p.f.} \left[ \int_D dV_{\vec{x}} \{ (L\psi(\vec{x}))G(\vec{x}, \vec{x}') - \psi(\vec{x}) (LG(\vec{x}, \vec{x}')) \} - \int_{\Gamma D} d\sigma_Y \{ (\partial_{n_Y} \psi(\vec{x}_Y))G(\vec{x}_Y, \vec{x}') - \psi(\vec{x}_Y) \partial_{n_Y} G(\vec{x}_Y, \vec{x}') \} \right] +$$

+ Suma de partes infinitas = 0.

lo que implica que

$$\text{IV-118} \quad \text{Suma de partes infinitas} = 0$$

y queda

$$\text{IV-119} \quad \text{p.f. (IV-117)} = 0$$

Por lo tanto, podemos dar como solución del problema inhomogeneo

$$\text{IV-120} \quad \psi(\vec{x}) = \int d\vec{x}' (pf G(\vec{x}, \vec{x}')) f(\vec{x}')$$

donde la parte finita de  $G(x, x')$ ,  $(pf G(x, x'))$ , está definida de acuerdo con lo anterior. En la práctica, esta definición equivale a prescindir del valor infinito de la integral en uno de los extremos del intervalo y quedarse únicamente con la parte finita en el otro extremo.

Una vez calculado el término de interacción  $S_{112}^{(0)}$  se procede de acuerdo con lo expresado en IV-113 a derivar respecto de  $t$  y de  $x_1$  y a integrar el producto de la función resultante por  $G_{22}^{(0)}$ . La integral respecto al tiempo se ha realizado analíticamente mientras que para las integrales respecto a  $y_1$  e  $y_2$  se utilizó un programa de ordenador. El apéndice 7 contiene este programa de cálculo.

La función obtenida para  $Q_{22}$  aparece dibujada en una serie de figuras para distintas combinaciones de las cuatro variables  $t, x_1, x_2', x_2 - x_2'$ . Las correlaciones  $Q_{22}$  representadas en la serie de figuras 5 lo son para una diferencia nula de tiempos ( $\tau = 0$ ). Todas las curvas de la figura 5a están caracterizadas por  $\rho = 0$ , y cada una de ellas corresponde a un valor distinto del parámetro  $x_2'/D$ , y nos da la variación de las correlaciones con  $x_2/D$ . En todas las curvas de esta figura los máximos se encuentran en el punto  $x_2 = x_2'$  ( $\Delta = 0$ ). De una curva a otra el valor de los máximos aumenta al crecer  $x_2'/D$  hasta llegar a estabilizarse. Este crecimiento es muy rápido de la curva 1 a la 2 y disminuye de la 2 a la 3 mientras que de la 3 a la 4 hay un pequeño decrecimiento. Todas las curvas de la fig. 5b se caracterizan por  $x_2'/D = 0.55$ . Cada una de ellas corresponde a un valor distinto del parámetro  $\rho/D$  y nos da la variación de  $Q_{22}$  co

$\Delta/D$ . Los máximos de las curvas decrecen al crecer  $\rho/D$ . Para la curva 1 ( $\rho=0$ ) el máximo está localizado en  $\Delta=0$  y al aumentar  $\rho$  observamos un desplazamiento en el máximo: a mayor separación en la dirección  $x_1$  la máxima correlación se presenta para puntos que están también separados una mayor distancia en la dirección  $x_2$ . Las curvas representadas en la figura 5c tienen el mismo valor para el parámetro  $x_2'/D$ . Cada una se caracteriza por un valor distinto de  $\Delta/D$  y nos da la variación de  $Q_{22}$  con  $\rho$ . La figura 5c complementa a la 5b, puesto que aquí también se observa que si  $\rho$  crece el máximo de la correlación se presenta para  $\Delta$  mayores.

Las correlaciones representadas en la serie de figuras 6 son para una sección transversal del canal ( $\rho = 0$ ). Cada una de las figuras se caracteriza por un valor distinto de  $x_2'/D$ . En cada figura las distintas curvas corresponden a distintos valores de  $\Delta/D$  y nos dan la variación de las correlaciones en el tiempo  $\tau$ . En los cálculos realizados a partir de la DIA,  $\tau$  es siempre mayor que cero. Esto es debido a la utilización de la función de respuesta infinitesimal. Aquí hemos extrapolado a separaciones negativas en el tiempo para comparar con los resultados experimentales.

La figura 6a tiene un valor de  $x_2'/D = 0.011$ , se refiere pues a una posición de  $x_2'$  muy próxima a la pared. En ella se observa que el máximo de la curva 1 ( $\Delta/D = 0.022$ ) es inferior al máximo de la curva 2, ( $\Delta/D = 0.044$ ). Sorprendentemente, cuando la distancia en la dirección  $x_2$  es mayor, el valor máximo de la correlación también lo es. El máximo de la curva 3 ( $\Delta/D = 0.066$ ) es el mayor de los de las correlaciones representadas en esta figura. A partir de la 3 los máximos de las curvas

disminuyen regularmente. En la figura 6a' se representan las mismas curvas, utilizando otra escala temporal que nos permite estudiar con mas detalle la localización de los máximos. En las tres primeras curvas el valor máximo aparece aproximadamente en  $\Delta = 0$ . A partir de la curva 4 se observa que los máximos aparecen desplazados respecto al origen y que crece la anchura de las curvas. La figura 6b se caracteriza por  $x_2'/D = 0.033$ .  $x_2'$  se toma más lejos de la pared y observamos que mientras el máximo de la curva 1 es mucho menor que el de la 2, la diferencia entre los máximos de las curvas 2 y 3 es pequeña. A partir de la curva 3 se sigue observando, como en 6a, un corrimiento de los máximos. En la figura 6c, ( $x_2'/D = 0.055$ ), el máximo de la curva 2 sobrepasa al de la 1, aunque ambos se encuentran muy próximos. En la figura 6c', que representa las mismas curvas con distinta escala en el eje de tiempos, el desplazamiento de los máximos es patente. La figura 6d corresponde al mayor valor de  $x_2'/D$ , (0.077) que hemos representado. En ella el máximo que domina es el de la curva 1. Esto significa que entre puntos que tienen una distancia espacial en la dirección  $x_2$  menor, la correlación es mayor. En esta figura se observa también el desplazamiento de los máximos.

Una vez conocida  $Q_{22}^{(1)}$ , sustituyendo en la ecuación IV-98, es posible obtener  $Q_{12}$ . Una estimación de órdenes de magnitud en el segundo miembro de esta ecuación, análoga a la realizada en el caso de  $Q_{22}^{(1)}$ , nos dice que podemos despreciar al primer sumando frente al segundo. Con las mismas aproximaciones empleadas para el cálculo de  $Q_{22}^{(1)}$  obtenemos:

IV-121

$$Q_{12} = \int dt \{ \partial_{x_1} [f(x_2) Q_{22}] \}$$

La  $\partial_{x_1} Q_{22}$  se obtiene a partir de los resultados anteriores y posteriormente se ajusta a una forma analítica. A partir de estos valores se integra numéricamente al tiempo. Los valores hallados para  $Q_{12}^{(1)}$  se representan en la serie de figuras 7. Estos valores se han obtenido para  $\tau=0$  y  $\Delta=0$ , en un punto de  $x_2/D=0,044$ , que corresponde aproximadamente a la mitad de la capa logarítmica. En la fig. 7a se representan las correlaciones normalizadas en escala lineal, y en la 7b en escala logarítmica.

Para calcular las dos correlaciones restantes, volvemos a las ecuaciones a y b de IV-57. Recordemos que en la aproximación de orden cero,  $Q_{21}=Q_{22}$ . Para calcular ahora  $Q_{21}^{(1)}$  repetimos el procedimiento empleado para  $Q_{22}^{(1)}$ , aunque usando  $G_{21}^{(0)}$  en vez de  $G_{22}^{(0)}$ . Llamaremos ahora :

$$\text{IV-122} \quad C(x_1-x'_1, x_2, x'_2, t-t') = -0,5(P_{121}S_{122} + P_{122}S_{222} + P_{112}S_{122})$$

$$\text{IV-123} \quad D(x_1-x'_1, x_2, x'_2, t-t') = -0,5(P_{211}S_{112} + P_{212}S_{122} + P_{221}S_{212})$$

Derivamos IV-57a respecto de  $x_1$  y IV-57b respecto de  $t$ , obteniendo el sistema:

$$\text{IV-124} \quad \partial_{x_1} \partial_t Q_{11} = \partial_{x_1}^2 (f(x_2) Q_{21}) + \partial_{x_1} C(x_1-x'_1, x_2, x'_2, t-t')$$

$$\text{IV-125} \quad \partial_t^2 Q_{21} - 2\partial_t \partial_{x_1} (f(x_2) Q_{11}) - \partial_t \partial_{x_2} (f(x_2) Q_{21}) = \partial_t D(x_1-x'_1, x_2, x'_2, t-t')$$

y sustituyendo IV-124 en el segundo sumando de IV-125 se obtiene

$$\text{IV-126} \quad \partial_t^2 Q_{21} - 2f^2(x_2) \partial_{x_1} Q_{21} - \partial_t \partial_{x_2} (f(x_2) Q_{21}) = 2f(x_2) \partial_{x_1} C + \partial_t D$$

La ecuación integrodiferencial obtenida para la correlación cruzada  $Q_{21}$  es análoga a la IV-100 obtenida para la transversal  $Q_{22}$ . Como para el primer orden de la iteración la función de Green correspondiente es  $G_{21}^{(0)}$ , se puede escribir simbólicamente:

$$\text{IV-127} \quad Q_{21}^{(1)} = \int G_{21}^{(0)} (2f(x_2) \partial_{x_1} C + \partial_t D)$$

y sustituyendo C y D por sus expresiones explícitas

$$Q_{21}^{(0)} = .5 f G_{21}^{(0)} \left[ \{2f(x) \partial_{x_1}^2 + \partial_t \partial_{x_2}\} S_{211}^{(0)} + \{2f(x) \partial_{x_1}^2 + \partial_t \partial_{x_2}\} S_{121}^{(0)} + 2 \partial_{x_1} \partial_{x_2} S_{221}^{(0)} + 2 \partial_t \partial_{x_1} S_{111}^{(0)} \right]$$

IV-128

Siguiendo un procedimiento análogo al empleado para estimar los ordenes de magnitud de  $S_{ijn}$  en el caso de  $Q_{22}^{(1)}$ , tenemos:

$$S_{111}^{(0)} = (2\lambda^3/\gamma^2)B + (4\lambda^2/\gamma)F - (8\lambda^4/\gamma^3)G \approx 11.17(\lambda^2/\gamma^2)B$$

$$S_{121}^{(0)} = (2\lambda/\gamma)\{-(4\lambda^2/\gamma)G + 2\gamma F\} \approx 11.32(\lambda/\gamma) B f^{-1}$$

$$S_{211}^{(0)} = (2\lambda^3/\gamma^2)B - (\lambda^2/\gamma^2)\{(4\lambda^2/\gamma)G - 2\gamma F\} + (2\lambda^3/\gamma^2)K - (2\lambda^2/\gamma^2)\{(4\lambda^2/\gamma)M - 2\gamma L\} \approx -11.17(\lambda^2/\gamma^2)K f^{-1}$$

$$S_{221}^{(0)} = 2\lambda B - 2\{(4\lambda^2/\gamma)G - 2\gamma F\} + 2\lambda K - 2\{(4\lambda^2/\gamma)M - 2\gamma L\} \approx -11.32 K f^{-2}$$

Para determinar la magnitud relativa de los sumandos debemos tener también en cuenta las derivadas que actúan sobre los términos  $S_{ijn}^{(0)}$

$$a) 2 \partial_t \partial_{x_1} S_{111}^{(0)} \approx 2(\lambda^3/\gamma)B \approx 2 \times 10^{-4}$$

$$b) (\partial_t \partial_{x_1} + 2f \partial_{x_1}^2) S_{121}^{(0)} \approx (3\gamma + \lambda^2 f) f^{-1} (\lambda/\gamma) B \approx 3.4 \times 10^{-4}$$

$$c) (\partial_t \partial_{x_1} + 2f \partial_{x_1}^2) S_{211}^{(0)} \approx (3\gamma + \lambda^2 f) f^{-1} (\lambda^2/\gamma^2) K \approx 6.8 \times 10^{-4}$$

$$d) 2 \partial_{x_2} \partial_{x_1} S_{221}^{(0)} \approx 2 \times 3 \lambda f^{-2} (\lambda/\gamma) K \approx 2.5 \times 10^{-8}$$

El término d) es despreciable frente a los otros, que son comparables entre sí, y por lo tanto deben ser incluidos. Para su estimación hay que considerar no sólo B sino también K. Los cálculos precisos para ello se encuentran detallados en el apéndice 6; en ellos se han empleado aproximaciones que ya se utilizaron en B. Una vez calculado los términos de interacción, se procede a derivar respecto de t y de  $x_1$ , y a integrar el producto de la función resultante por  $G_{21}^{(0)}$ . Para integrar a t se ha procedido de forma analítica, mientras que las integrales a  $y_1$  e  $y_2$  se han

hecho numéricamente, utilizando el programa detallado en el apéndice 8 con algunas instrucciones cambiadas.

Las correlaciones  $Q_{21}^{(1)}$  están representadas en las figuras 8. En la figura 8a, las distintas curvas dan  $Q_{21}$  para un  $x_2'$  fijo. Cada una de ellas corresponde a una distancia entre los puntos  $\rho_x$  en la dirección longitudinal distinta, y nos da la variación de las  $Q_{21}$  con la distancia en la dirección transversal  $x_2$ . En la curva 1, para una  $\rho_x=0$ , el máximo no aparece en  $\Delta=0$ , sino que está algo desplazado. En las otras curvas, caracterizadas por  $\rho_x$  crecientes, este desplazamiento del máximo es cada vez más acusado. En la figura 8b aparece la variación de  $Q_{21}$  con  $\rho_x$  para  $\Delta=0$ . Cada curva se caracteriza por un  $x_2$ , y sus máximos crecen con éste, es decir conforme nos alejamos de la pared.

#### ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

Las curvas de las figuras 5, 6, 7 y 8 se obtienen a partir de valores que corresponden a la primera iteración en el cálculo de las correlaciones. Aquí vamos a suponer que esta primera iteración aproxima bien a la solución exacta. Existe evidencia experimental de que los términos incluidos en el que hemos llamado de interacción, que es el llamado por Leslie inercial y que en los modelos semiempíricos está contenido en parte en el término difusivo, es pequeño. Para analizar si los resultados así obtenidos son válidos, debemos compararlos con las medidas disponibles.

Desgraciadamente, como ya explicamos en la sección 3, las medidas existentes comparables con nuestros cálculos no son muchas. Recordemos que esto en parte era debido a que en la teoría de Kraichnan las correlaciones se toman en puntos y/o tiempos distintos, mientras que en la mayoría de los trabajos experimentales disponibles se han medido en el



mismo punto y tiempo. Pese a ello en nuestros resultados aparece alguna curva, que da las correlaciones para  $\rho_x=0$  y  $\Delta=0$ . Estas curvas se obtuvieron tomando límites en las calculadas en puntos distintos. El procedimiento es matemáticamente correcto, aunque no parece muy correcto desde el punto de vista físico, ya que para el cálculo de las correlaciones se ha utilizado la función de respuesta infinitesimal. Nos limitaremos pues, a comparar el resultado de nuestros cálculos con los datos experimentales disponibles para las correlaciones en puntos y tiempos distintos, que aparecen representados en la serie de figuras 2 (Sabot) y 3 (Comte-Bellot).

Al examinar estos datos con detalle, para compararlos con los nuestros aparecen algunas dificultades. Tanto Sabot como Comte-Bellot llegan en sus medidas de las correlaciones sólo hasta la región en que la capa logarítmica limita con el centro del canal, que en la escala adimensionalizada por  $D$  corresponde al punto  $0,1$ . Por ello la comparación con nuestros resultados se verá restringida al tipo de dependencia funcional en  $\tau$ ,  $\rho_x$ , y  $\Delta$ , no pudiendo extenderse a la evolución de las correlaciones a través de la región inercial, es decir a la dependencia en  $x_2$ . Como ya decíamos cuando se trataba de imponer la condición de contorno en el límite  $x_2=0$ , el acoplo entre la ley logarítmica y la ley deficitaria de velocidades (parabólica) es tal que salvo en regiones inmediatas al eje central es casi imposible determinar a simple vista en las representaciones gráficas si la ley de velocidad media es logarítmica o parabólica.

Además las correlaciones en Comte-Bellot se miden para  $\tau=0$  y sólo en Sabot aparece su evolución en el tiempo. Esta evolución se midió tan sólo para  $R_{11}$ , para cuyo equivalente  $Q_{11}$  se ha obtenido en nuestro cálculo menos información que para las restantes correlaciones. Otro in-

conveniente con el que nos encontramos para la utilización de las medidas de Sabot, es que no se han tomado en un canal como las de Comte Bellot, sino en un tubo cilíndrico. Aunque también en un tubo en la proximidad de la pared hay una capa logarítmica, en la parte central el flujo presenta características distintas a las del flujo central en el canal (recordemos que la ley deficitaria no es universal). Debido a las limitaciones que vamos a encontrar al comparar nuestros cálculos con los datos experimentales, realizaremos además un análisis de otro tipo, para el cual tendremos en cuenta la noción intuitiva que poseemos de los vórtices, la dinámica de éstos y las leyes de escala. Ante la imposibilidad en que nos encontrábamos de imponer a las correlaciones unos valores iniciales y unos valores en el contorno que limita con la parte central del flujo, optamos por dar a  $\lambda$  y  $\gamma$  unos valores tomados de los datos experimentales. El valor de  $\lambda$  se obtuvo de los datos de Comte-Bellot y el de  $\gamma$  de los de Sabot, pese a las limitaciones que presentan estos datos y que ya hemos mencionado. Los valores de estos parámetros que se tomaron en la aproximación de orden cero son  $\lambda = 0,2 \text{ mm}^{-1}$  y  $\gamma = 250 \text{ s}^{-1}$ . Cuando calculamos por primera vez  $Q_{22}$ , se hizo un programa de cálculo para ordenador, con el fin de conseguir valores de  $\lambda$  y  $\gamma$  que dieran un acuerdo óptimo entre la  $Q_{22}$  representada en la figura 5b y las medidas de  $R_{22}$  que aparecen en la figura 3a. El programa calculó  $Q_{22}(\rho_x)$  para un conjunto de valores que iban desde  $\lambda = 0,05$  hasta  $\lambda = 0,5 \text{ mm}^{-1}$ , en intervalos de 0,05; y desde  $\gamma = 100$  hasta  $\gamma = 500 \text{ s}^{-1}$ , en intervalos de 50. Las anchuras de  $Q_{22}(\tau=0, \Delta=0, \rho_x)$  variaban de forma casi imperceptible con  $\lambda$ , y algo más con  $\gamma$ . Entre los distintos valores se eligió para realizar los cálculos definitivos  $\lambda = 0,15 \text{ mm}^{-1}$ , y  $\gamma = 150 \text{ s}^{-1}$ ; con estos valores se repitieron los cálculos para  $Q_{22}$  y

las restantes correlaciones.

Analicemos ahora los resultados que se han representado en la serie de figuras 5, caracterizada porque  $x'_2$  es siempre igual a  $0,055 D$  y  $\tau$  es cero. La curva 1 ( $\rho_x=0$ ) de 5b es semejante a la correlación  $R_{22}$  medida por Comte-Bellot en  $\tau=0$  y  $\rho_x=0$  y que hemos representado en 3a. Hemos estimado la anchura de  $Q_{22}$  como  $0,0642 D$ , mientras que la de  $R_{22}$  es  $0,078 D$ . Si comparamos 5b y 2b (aunque en 5b se representa  $Q_{22}$  y en 2b  $R_{22}$ ), se observa un desplazamiento de los máximos similar. La misma observación resulta de comparar 5c con 2c; en ambas además los máximos son más pronunciados que en el caso anterior y el decrecimiento es mucho más lento que en el caso de 5b y 2b.

En la figura 3c se muestra el comportamiento experimental de los valores medios de las fluctuaciones de velocidad en la dirección  $x_2$ , cuando varía  $x'_2$ . En la figura 5a se muestra el comportamiento que hemos calculado para la correlación  $Q_{22}$  entre las fluctuaciones en esa dirección. En 5a los máximos crecen con  $x'_2/D$ , rápidamente al principio estabilizándose este crecimiento para las dos últimas curvas representadas. La última curva que se muestra en esta figura corresponde al primer valor de  $x'_2$  que aparece representado en 3c. Sabemos que las fluctuaciones de velocidad se anulan en la pared, luego la curva de 3c debe extrapolarse desde el primer punto representado hacia cero. La caída brusca que resultaría correspondería en la figura 5a al paso del máximo de la curva 4 al de la curva 1.

Para ver el comportamiento de estas correlaciones con el tiempo, comparamos 6d para  $Q_{22}(\tau, x'_2/D=0.077, \Delta, \rho_x=0)$  con 2a para  $R_{11}(\tau, x'_2/D=0.1, \Delta, \rho_x=0)$ . El desplazamiento de los máximos se produce en la misma dirección y en ambos hay una disminución en magnitud al separarse en

los puntos en la dirección transversal a la del flujo.

Observemos también que los máximos de las correlaciones en la serie de figuras 5 y 6 se desplazan tanto en el tiempo como en la dirección  $x_1$  al crecer la separación en la dirección  $x_2$ , lo que resulta explicable considerando como puede variar la correlación por el hecho de encontrarse en un vórtice, aunque la distancia entre los puntos sea mayor. Es interesante seguir cómo evolucionan los máximos cuando varía  $\Delta/D$  en la serie de figuras 6. Para la figura 6a, donde se muestra la posición más próxima a la pared el comportamiento es distinto del de 6d y 2a. En este caso ( $x'_2=0,011 D$ ) no dominan las correlaciones para el valor de  $\Delta/D$  más pequeño representado ( $\Delta=0,022D$ ). Las correlaciones dominantes se dan para el valor  $\Delta/D=0,066$ . Esto significa que el punto más correlacionado en velocidad con un  $x'_2$  próximo a la pared, se encuentra cerca del límite de la capa logarítmica con la parte central del canal. En las gráficas siguientes de esta serie, las correlaciones dominantes van correspondiendo a distancias transversales menores, hasta llegar a la posición más próxima de la región central para la que hemos calculado, que es la fig 6d, en donde la correlación dominante corresponde a la menor distancia transversal. Esto nos sugiere la existencia de vórtices, cuyo diámetro es aproximadamente del orden de la capa logarítmica, que son transportados a través de ésta, sin sufrir casi deformación.

Sobre las correlaciones restantes ( $Q_{21}, Q_{12}, Q_{11}$ ) nuestros cálculos proporcionan menos información. Al comenzarlos pudimos optar entre  $Q_{22}$  y  $Q_{21}$  para calcular en primer lugar. Debido a que  $G_{21}^{(0)}$  es algo más complicada que  $G_{22}^{(0)}$ , elegimos  $Q_{22}$ . Esta elección se reveló acertada cuando al discutir los órdenes de magnitud de los distintos sumandos en

el término de interacción, encontramos que en el cálculo de  $Q_{22}^{(1)}$  se debían retener sólo aquellos términos que incluyeran la integral  $B$  mientras que en el cálculo de dicho término para  $Q_{21}^{(1)}$ , había que considerar además aquellos sumandos que incluyen  $K$ . Debido a limitaciones de tiempo de cálculo y de capacidad de almacenamiento, una vez comenzado el cálculo por  $Q_{22}$ , la información para las restantes correlaciones tenía que ser menor.

En la figura 7c se ha representado la correlación  $Q_{12}$ , para  $x_2' = 0,044D$  en escala logarítmica, y con puntos se han representado los valores experimentales de Sabot para la  $R_{12}$  en un punto próximo ( $x_2' = 0,1D$ ) a la capa logarítmica. En las figuras 8 se muestran los resultados de nuestros cálculos para  $Q_{21}$ . Estos valores no pueden ser contrastados con resultados experimentales, por no existir éstos en la bibliografía. Sin embargo en la figura 8a donde aparecen las  $Q_{21}(x_2'/D = 0,055, \tau = 0, \Delta, \rho_x)$  tenemos algo interesante: cuando  $\rho_x$  es cero el máximo de las correlaciones no está en  $\Delta = 0$ . Esto es razonable, pues la correlación entre dos componentes distintas de las fluctuaciones de velocidad no tiene que ser máxima en el mismo punto (hay un tiempo mínimo de respuesta que está relacionado con la función de respuesta infinitesimal).

En la figura 9 se ha representado  $Q_{11}(\tau = 0, \Delta/D = 0, x_2'/D = 0,044, \rho_x)$ . La curva obtenida es casi idéntica a la que aparece para  $R_{11}$  representada en la figura 3b. La anchura de la primera es 0,45 y la de la segunda 0,65. Estos valores pueden considerarse como buenos, teniendo en cuenta que el ajuste de los parámetros  $\lambda$  y  $\gamma$  se hizo para la anchura de la  $Q_{22}$ , no para la  $Q_{11}$ . Notemos que la  $Q_{11}$  que hemos calculado tiene un decrecimiento más lento que la  $Q_{22}$  que hemos obtenido. Esto ocurre también en los resultados experimentales.

## ESTUDIO DEL ESPECTRO ASOCIADO A LAS CORRELACIONES

Teniendo en cuenta que el flujo que nos interesa es semihomogéneo, se puede asociar a las correlaciones que hemos calculado unas funciones espectrales. En esta sección vamos a comprobar que para estas funciones se verifica la hipótesis de forma espectral constante propuesta por Leslie. Encontramos además una expresión para la escala de longitud en la región logarítmica que coincide con la longitud de mezcla de Prandtl. La efectividad de la longitud de mezcla de Prandtl como medida de los vórtices en la zona inercial se ha comprobado experimentalmente.

### LA APROXIMACIÓN $P_1$ PARA UN FLUJO HOMOGÉNEO Y ANISÓTROPO

En un flujo con tales características la velocidad media no será nula. El gradiente de esta velocidad debe ser constante, ya que lo contrario implicaría inhomogeneidad. Por lo tanto puede expresarse esta velocidad como

$$V-1 \quad U_1 = \delta_{11} U' x_2$$

donde  $U'$  es una constante.

Lógicamente hay que preguntarse qué situación física corresponde a este perfil de velocidad. Si un campo turbulento se deforma, según V-1, se inducen en él vórtices que crecen, hasta que se ven limitados por el contorno del flujo. Cuando el esfuerzo de deformación cesa, se ha comprobado experimentalmente que la vuelta a la homogeneidad tiene lugar antes que a la isotropía. Aunque este flujo homogéneo y anisótropo no exista en la realidad, puede suponerse con buena aproximación que tales condi-

ciones se cumplen en el límite de  $k$  altos.

Como se trata del flujo siguiente en dificultad matemática a la turbulencia homogénea e isotrópica, ha sido muy estudiado. Ello se hizo en principio tratando de averiguar algo sobre los mecanismos de producción de fluctuaciones de velocidad. En este sentido no se consiguió nada, ya que como señaló Kraichnan, en un flujo en el que los vórtices pueden crecer indefinidamente no hay una longitud asociable al rango de producción. Gracias a la homogeneidad se puede pasar del espacio de configuración al de números de onda mediante una transformación de Fourier. La ecuación para el campo de velocidades fluctuantes tendrá la forma

$$V-2 \quad (\partial_t - \nu \nabla^2) u_i + U' (x_2 \partial_{x_1} + \delta_{11} u_2) + \partial_{x_j} (u_i u_j) = -\partial_{x_j} p$$

Si eliminamos la presión en la forma habitual y pasamos al espacio de números de onda mediante una transformación de Fourier nos queda

$$V-3 \quad (\partial_t + \nu k^2) u_i(\vec{k}, t) - M_{ijm}(\vec{k}) \int_{\Delta} u_j(\vec{p}, t) u_m(\vec{r}, t) = U' N_{ij}(\vec{k}) u_j(\vec{k}, t)$$

donde  $M_{ijm}(\vec{k})$  está dado en II-3 y

$$V-4 \quad N_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} k_1 \partial_{k_2} - (\delta_{11} - 2k_1 k_1 / k^2) \delta_{j2}$$

Suponiendo que el flujo es estacionario, la ecuación para las correlaciones entre componentes de velocidad es

$$V-5 \quad (\partial_t + \nu k^2) Q_{in}(\vec{k}, t-t') - M_{ijm}(\vec{k}) \int_{\Delta} \langle u_j(\vec{p}, t) u_m(\vec{r}, t) u_n(-\vec{k}, t') \rangle = U' N_{ij}(\vec{k}) Q_{jn}(\vec{k}, t-t').$$

De nuevo nos encontramos con una ecuación no lineal, que no podemos resolver directamente. Se puede, sin embargo, estudiar un caso particular del anterior: cuando sobre un campo de velocidad homogéneo e isotrópico se superpone un flujo medio muy débil. Entonces para que se conserve la energía hay que introducir una fuerza ficticia en el segundo miembro de V-5, y multiplicar la velocidad media  $U'$  por un parámetro  $\delta$  que su-

pondremos pequeño

$$V-6 \quad (\partial_t + \nu k^2) u_i(\vec{k}, t) - M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j(\vec{p}, t) u_m(\vec{r}, t) = f_{0i}(\vec{k}, t) + U' N_{ij}(\vec{k}) u_j(\vec{k}, t)$$

Desarrollando en función del parámetro

$$V-7 \quad u_i(\vec{k}, t) = u_i^{(0)}(\vec{k}, t) + \delta u_i^{(1)}(\vec{k}, t) + \delta^2 u_i^{(2)}(\vec{k}, t) + O(\delta^3)$$

Sustituyendo en V-6, se obtienen una serie de ecuaciones acopladas

$$V-8 \quad (\partial_t + \nu k^2) u_i^{(0)}(\vec{k}, t) - M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(0)}(\vec{r}, t) = f_{0i}(\vec{k}, t)$$

$$V-9 \quad (\partial_t + \nu k^2) u_i^{(1)}(\vec{k}, t) - 2M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(1)}(\vec{r}, t) = U' N_{ij}(\vec{k}) u_j^{(0)}(\vec{k}, t)$$

$$V-10 \quad (\partial_t + \nu k^2) u_i^{(2)}(\vec{k}, t) - M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} \{2u_j^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(2)}(\vec{r}, t) + u_j^{(1)}(\vec{p}, t) u_m^{(1)}(\vec{r}, t)\} = U' N_{ij}(\vec{k}) u_j^{(1)}(\vec{k}, t)$$

Multiplicando V-10 por  $\delta^2$  y sumando el resultado a V-8 queda

$$V-11 \quad (\partial_t + \nu k^2) \{u_i^{(0)}(\vec{k}, t) + \delta^2 u_i^{(2)}(\vec{k}, t)\} - M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} \{u_j^{(0)}(\vec{p}, t) + \delta^2 u_j^{(2)}(\vec{p}, t)\} \{u_m^{(0)}(\vec{r}, t) + \delta^2 u_m^{(2)}(\vec{r}, t)\} - \delta^2 M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} u_j^{(1)}(\vec{p}, t) u_m^{(1)}(\vec{r}, t) + O(\delta^3) = U' N_{ij}(\vec{k}) u_j^{(1)}(\vec{k}, t)$$

Hemos prescindido del término ficticio  $f_{0i}(\vec{k}, t)$  que ya no es necesario para la conservación de la energía, puesto que el término que realmente la suministra se incluye ya en el análisis. A continuación se redefine  $u_i^{(0)}$  para que incluya  $\delta^2 u_i^{(2)}$ , se trunca la serie y se hace  $\delta = 1$ . La filosofía de estas aproximaciones, análogas a la DIA se ha comentado suficientemente en la sección 2. De todo ello resulta

$$V-12 \quad (\partial_t + \nu k^2) u_i^{(0)}(\vec{k}, t) - M_{ijm}(\vec{k}) \sum_j^{\Delta} \{u_j^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(0)}(\vec{r}, t) + u_j^{(1)}(\vec{p}, t) u_m^{(1)}(\vec{r}, t)\} = U' N_{ij}(\vec{k}) u_j^{(1)}(\vec{k}, t)$$

V-9 y V-12 constituyen un sistema cerrado de ecuaciones para  $u_i^{(0)}$  y  $u_i^{(1)}$ , ya que al hacer  $\delta = 1$  no podemos considerarlas como partes de un desarrollo perturbativo. Estas variables pueden ser reinterpretadas como fluctuaciones asociadas a la energía turbulenta y al stress de Reynolds. En efecto, a partir de V-9 y de V-11 se pueden determinar un par de ecuaciones para las correlaciones o tensores de energía:



$$\begin{aligned}
 \text{V-13} \quad Q_{ij}^{(0)}(\vec{k}, t-t') &= \langle u_i^{(0)}(\vec{k}, t) u_j^{(0)}(-\vec{k}, t') \rangle \\
 Q_{ij}^{(1)}(\vec{k}, t-t') &= \langle u_i^{(1)}(\vec{k}, t) u_j^{(0)}(-\vec{k}, t') \rangle
 \end{aligned}$$

y de V-12 se puede obtener

$$\text{V-14} \quad (\partial_t + \nu k^2) Q_{in}^{(0)}(\vec{k}, t-t') - M_{ijm}(\vec{k}) \int u_i^{(0)}(\vec{p}, t) u_m^{(0)}(\vec{r}, t) u_n^{(0)}(-\vec{k}, t') = U' N_{ij}(\vec{k}) Q_{jn}^{(1)}(\vec{k}, t-t')$$

ya que de acuerdo con V-7, se ha descompuesto:

$$\text{V-15} \quad Q_{ij} = Q_{ij}^{(0)} + Q_{ij}^{(1)} + \dots$$

y por analogía para la función de respuesta infinitesimal, escribimos también:

$$\text{V-16} \quad G_{ij} = G_{ij}^{(0)} + G_{ij}^{(1)} + \dots$$

Hay que encontrar un sentido a esta descomposición. Si  $\delta$  se hubiese mantenido pequeño, los términos  $Q_{ij}^{(1)}, Q_{ij}^{(2)}, \dots$ , podrían interpretarse como correcciones a  $Q_{ij}^{(0)}$ . Puesto que hicimos  $\delta = 1$ , esta interpretación no es posible.

Observando bien V-12 vemos que mientras los operadores  $(\partial_t + k)$  y  $M_{ijm}(\vec{k})$  tienen simetría esférica,  $U' N_{ij}(\vec{k})$  no la tiene. Si  $U'$  se anulase, (habría entonces que introducir otra vez la fuerza ficticia  $f_{0i}$  para que se conservase la energía) no existiría interacción cruzada entre los distintos términos de V-12, y tendríamos un flujo isótropo. Al ser  $U'$  distinta de cero, se rompe la isotropía, o lo que es lo mismo, la simetría esférica. A partir de estas consideraciones, se puede interpretar la descomposición de  $Q_{ij}$ , no como un desarrollo perturbativo, sino como una descomposición de las correlaciones según sus diferentes dependencias angulares, algo semejante a un desarrollo en armónicos esféricos generalizados.

El problema del transporte de neutrones en un reactor, se puede abordar mediante una descomposición de este tipo (41). El procedimiento consiste

en partir de la ecuación de Boltzmann para el caso más sencillo y desarrollar la sección eficaz en serie de polinomios de Legendre, funciones de la variable angular  $\theta$ . Es necesario entonces realizar alguna aproximación, conservando un número  $n$  de polinomios y prescindiendo de los demás. La más sencilla consiste en cortar la serie en el segundo término, que corresponde a  $P_1(\cos \theta)$ ; por lo que esta aproximación se conoce abreviadamente como  $P_1$ . Excepto en algunos casos en que no puede ser empleada,  $P_1$  es el más sencillo y útil de todos los métodos que abordan el transporte de neutrones.

La similitud entre la descomposición que nos introduce en las correlaciones el flujo homogéneo y anisótropo y la descomposición de la sección eficaz en el problema del transporte de neutrones, lleva a proponer para las correlaciones una aproximación análoga a  $P_1$ , que expresamos:

$$V-17 \quad Q_{ij} = Q_{ij}^{(0)} + Q_{ij}^{(1)} .$$

#### LA HIPÓTESIS DE FORMA ESPECTRAL CONSTANTE

Si tenemos una ecuación  $L(u) = 0$ , en que  $L$  es un operador diferencial cualquiera, función de dos variables, con condiciones de contorno homogéneas, es posible encontrar una solución aproximada del problema, en la forma:

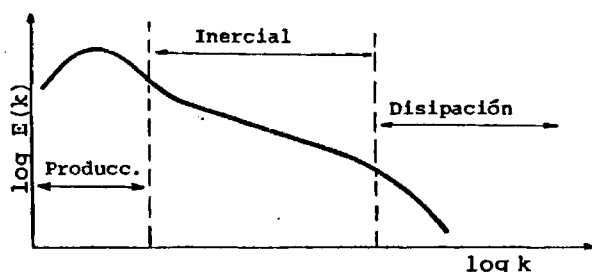
$$V-18 \quad \tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x, y)$$

donde las  $\phi_i(x, y)$  son un conjunto de funciones que satisfacen las condiciones de contorno, elegidas a priori, y los  $c_i$  son coeficientes numéricos a determinar. Para que  $\tilde{u}$  aproxime a la solución exacta  $u$ , el conjunto de funciones  $\phi_i(x, y)$  deberá ser completo y linealmente independiente. Existe entonces un método para derivar un sistema de

ecuaciones cuya resolución nos dará los coeficientes  $c_i$ .

Esta forma de encontrar la solución de una ecuación diferencial se conoce como método de Galerkin. Para muchos de los resultados que se obtuvieron utilizándolo, se eligió como  $\phi_i$  las funciones  $\sin(k\pi x/l)$  o  $\cos(k\pi x/l)$ ; por ello es conocido también como aproximación de forma espectral constante. En estos casos su aplicación equivale a buscar una solución en que la contribución de cada número de onda tenga en cualquier punto del espacio un peso fijo.

Está claro que este método no se puede utilizar para buscar una solución aproximada de la ecuación para las correlaciones, puesto que no se verifican las condiciones necesarias. Sin embargo, examinando datos experimentales para distintos tipos de flujo, Leslie encontró indicios de que en la región "no viscosa" (es decir, cualquier región en que la viscosidad no tenga un papel dominante), se podría considerar una forma constante para el espectro asociado a las correlaciones, aunque la anchura y la escala de la representación variarían de un punto a otro. Por ello propuso para el espectro en aquellas regiones en que existe un rango inercial desarrollado, la siguiente forma:



La forma supuesta para el espectro en el rango inercial es una estimación a partir de datos experimentales existentes, mientras que la del rango de producción es una intuición. Esta hipótesis implica un desarrollo en serie de funciones universales. A diferencia de lo que ocurre

cuando es posible aplicar el método de Galerkin, los coeficientes que multiplican a estas funciones no serán constantes, sino funciones de las coordenadas del punto, y escalarán el espectro representado en el dibujo.

Hay que decidir como elegir las funciones en que se desarrollaran las correlaciones. Puesto que en el caso matemáticamente más sencillo de un flujo con velocidad media no nula nos ha aparecido una descomposición intrínseca en distintas dependencias angulares, Leslie propone que se desarrolle en estas funciones.

Antes de aplicar la hipótesis al caso más general hay que precisar que se entiende por "espectro asociado a las correlaciones" en una situación inhomogénea, ya que la posibilidad de hacer una transformación de Fourier se asocia a la homogeneidad. En general las correlaciones son funciones de  $(t-t'), (x_1-x'_1), (x_3-x'_3), x_2$  y  $x'_2$ . Nosotros hemos designado  $(x_1-x'_1)$  por  $\rho_x$ , y a  $(t-t')$  por  $\tau$ . Mediante un cambio del sistema de referencia es posible pasar a una dependencia en:  $\tau, \rho_x, (x_3-x'_3), Y, \Delta$ , donde  $\Delta = (x_2-x'_2)$  e  $Y = (x_2+x'_2)/2$  son las coordenadas del centroide.

La transformación compleja de Fourier se realiza en las dos dimensiones infinitas y la nueva variable  $\Delta$ ; la coordenada  $Y$  no se transformará. Definimos un tensor de energía asociado a las correlaciones para una diferencia temporal nula como

$$V-19 \quad q_{ij}(\vec{k}, Y) = (2\pi)^{-3} \int d^3(\vec{x}-\vec{x}') q_{ij}(\vec{x}-\vec{x}', Y) \exp(-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}'))$$

La transformación integral se convierte en un desarrollo en serie de Fourier en la dirección  $x_2$ . Para hacer posible éste, a partir de la función que nos da la correlación en el canal, se crea otra periódica utilizando el método de las imágenes, dividiendo el eje  $x_2$  en intervalos de anchura  $2h$ .

Como términos con dependencias angulares distintas tendrán también formas espectrales asociadas distintas, hay que descomponer las correlaciones en sus distintas dependencias angulares, antes de imponer que la forma espectral sea constante. Una vez hecho esto cada uno de los términos con distinta dependencia angular se escribirá como:

$$V-20 \quad q_{ij}^{(\alpha)}(\vec{x}-\vec{x}', Y) = I^{(\alpha)}(Y) \phi_{ij}^{(\alpha)}((\vec{x}-\vec{x}')/l(Y))$$

donde  $I^{(\alpha)}(Y)$  es un factor de intensidad que depende sólo de  $Y$ ,  $\phi_{ij}^{(\alpha)}$  es el factor de forma, función de la variable escalada  $(\vec{x}-\vec{x}')/l(Y)$ , y la función  $l(Y)$  que utilizamos para escalar se puede interpretar como la anchura de los vórtices en el punto  $Y$ . Al pasar de un punto a otro el factor de intensidad,  $I^{(\alpha)}(Y)$  deberá absorber las variaciones de las correlaciones, ya que la forma funcional  $\phi_{ij}^{(\alpha)}$  debe conservarse. Por la misma razón  $l(Y)$  será diferente para distintos tipos de flujo.

Una vez separadas las distintas dependencias angulares se pasa al espacio de números de onda mediante la expresión V-19 obteniéndose:

$$V-21 \quad q_{ij}^{(\alpha)}(\vec{k}, Y) = k^{-3} I^{(\alpha)}(Y) \phi_{ij}^{(\alpha)}(l(Y)\vec{k})$$

donde  $\phi_{ij}^{(\alpha)}$  es la transformada de Fourier de  $\phi_{ij}^{(\alpha)}$ .

Mediante una aproximación semejante a la  $P_1$  introducida para el flujo homogéneo y anisótropo, se corta el desarrollo en la segunda dependencia angular, con lo que escribimos

$$V-22 \quad q_{ij}(\vec{k}, Y) = (l(Y)/4\pi k^2) \{ (E_0(Y) P_{ij}(\vec{k}) f^{(0)}(l(Y)k) + \tau(Y) V_{ij}(\vec{k}) f^{(1)}(l(Y)k) ) \}$$

donde se ha sacado fuera de las funciones  $f^{(0)}$  y  $f^{(1)}$  la dependencia vectorial. En realidad, el tensor simétrico  $P_{ij}(\vec{k})$  se debería escribir  $P_{ij}(l(Y)\vec{k})$  y lo mismo sucede con  $V_{ij}(\vec{k})$ , pero como son funciones homogéneas se puede prescindir del factor  $l(Y)$ . Si la hipótesis de forma espectral constante es cierta,  $f^{(0)}$  y  $f^{(1)}$  son funciones universales para todos aquellos flujos con rangos de producción e inercial bien

establecidos.

La función  $f^{(0)}(z)$  debe estar normalizada y comportarse para  $k$  grandes como  $k_0 z^{-5/3}$ , ya que corresponde a la parte simétrica del espectro asimilable a una situación de isotropía. Entonces V-22 será compatible con

$$V-23 \quad E_0(Y) = .5 \int d^3k \, q_{ii}(\vec{k}, Y)$$

donde  $E_0(Y)$  es la energía turbulenta en el punto  $Y$ , siempre que el factor  $V_{ij}(k)$  no contribuya. La función espectro de energía debe satisfacer:

$$V-24 \quad E_0(Y) = \int_0^\infty dk E(k, Y)$$

por lo que

$$V-25 \quad E(k, Y) = 2\pi k^2 q_{ii}(\vec{k}, Y)$$

y para  $k$  grandes, teniendo en cuenta la forma asintótica de  $f^{(0)}$ , debe

$$V-26 \quad E(k, Y) \approx k_0 E_0(Y) (l(Y))^{-2/3} k^{-5/3}$$

por lo que se puede identificar

$$V-27 \quad E_0(Y) (l(Y))^{2/3} = (\epsilon(Y))^{2/3}$$

donde  $\epsilon(Y)$  es la disipación local. De aquí se deriva una expresión

para la escala local de longitud  $l(Y)$  como función de la energía turbulenta y la disipación

$$V-28 \quad l(Y) = (E_0(Y))^{3/2} / \epsilon(Y)$$

Para probar que la forma del espectro asociada a las correlaciones es constante, tal como hemos supuesto, hay que calcular este espectro en alguna situación conocida. Una vez determinadas en esta situación las funciones  $f^{(0)}$  y  $f^{(1)}$ , se trataría de comprobar su universalidad, para lo que habría que investigar si en algún otro flujo el espectro asociado a las correlaciones es expresable mediante estas funciones según V-22. Leslie sugirió que la situación conocida más adecuada para reali-

zar este cálculo era la capa logarítmica, pues se trata de una situación universal y con un rango inercial muy extenso.

En la sección 3, pag. 75 hemos hablado de la longitud de mezcla de Prandtl. Aunque se trata de un modelo semiempírico muy sencillo se sigue utilizando porque resulta válido en aquellos flujos en que el transporte por convección y difusión es pequeño, como es el caso de la región viscosa inmediata a la pared y de la zona logarítmica. La longitud de mezcla que Prandtl propuso en esta última es

$$V-29 \quad l(x_2) = x_2/B$$

B es una constante que midió von Karman y lleva su nombre. El valor estimado por von Karman para B fué 2.5, aunque otras medidas dan valores entre esta cantidad y 2.1. A veces se llama también constante de von Karman a  $\kappa = 1/B$ , siendo su valor experimental aproximadamente 0.4.

El estudio que hemos realizado se refiere al espectro asociado a la  $Q_{22}$  ya que si la forma espectral es constante, esto ocurrirá en todas las correlaciones. Partimos de los valores calculados cuando  $\rho_x = 0$  y  $\tau = 0$ . Hacemos una transformación de coordenadas, pasando de una dependencia en  $x_2, x_2'$  a una dependencia en  $\Delta, Y$ . Cada una de las curvas que se muestran en la figura 10a corresponde a un valor de  $Y$ , y da la variación de  $Q_{22}$  con  $\Delta$ . Las curvas están normalizadas. Resulta evidente en esta figura que la forma de las curvas es la misma, variando únicamente su anchura. Esto nos prueba que la forma de las correlaciones para una dependencia angular es constante (nótese que la dependencia angular representada es la simétrica, puesto que se hizo  $\rho_x = 0$ ).

Tomando las diferentes anchuras para cada  $Y$ , ajustamos por un método de mínimos cuadrados una función  $l(Y)$  tal que al dividir por ella todas las anchuras se reducían a una sola. El coeficiente de determina-

ción de este ajuste es muy bueno,  $r=0.97$ , y la dependencia obtenida

$$V-30 \quad l(Y) \approx (2.23 Y^{-0.915})^{-1} = .45 Y^{0.915}$$

Si comparamos con V-29, el valor obtenido para la constante de von Karman B es excelente. La dependencia en Y sin embargo en vez de ser lineal lleva un exponente algo menor.

En la figura 10b se representa la variación de  $Q_{22}$  con  $\Delta$  para distintos valores de  $\rho_x$ . La asimetría de las curvas nos indica que se puede descomponer  $Q_{22}$  en una parte simétrica y otra antisimétrica, que se han ajustado

$$V-31 \quad (Q_{22})_s \approx \exp(-.299((\rho_x/10)^{1.626} + \Delta)^{1.626}))$$

$$V-32 \quad (Q_{22})_a \approx (\rho_x/10) \exp(-\sqrt{\Delta \rho_x}/10 - 0.3((\rho_x/10) - \Delta)^2)$$

En la figura 10c se representa con + los valores calculados para el factor de intensidad  $I_s(Y)$  y en trazo continuo su ajuste por

$$V-33 \quad I_s(Y) \approx 2.32(1 - \exp(-0.76Y^{1.6}))$$

Además para la  $(Q_{22})_s$  hemos realizado una transformación de Fourier, integral en la dirección  $x_1$  y discreta en la dirección  $x_2$ . En este caso el intervalo de determinación de  $k$  se eligió como  $2\pi/2h$ . El resultado se muestra en la figura 11a, y puede ser comparado con la figura 11b donde hemos representado los datos experimentales de Comte-Bellot para la función espectral  $\psi_{22}$  definida como

$$V-34 \quad \bar{u}_2^2 = \int_0^{2h} dk_2 \psi_{22}(k_2).$$

aunque la relación no es inmediata, pues  $\bar{u}_2^2$  es un coeficiente de autocorrelación. Es interesante notar que en ambas curvas hay un intervalo (cuya medida es algo menos de una década) en que la dependencia en  $k$  es  $k^{-5/3}$ , es decir el espectro de Kolmogorov. La localización de este



intervalo no es la misma en los dos casos, pues en Comte-Bellot se trata del intervalo  $(0.3-2) \text{ mm}^{-1}$  y en nuestros cálculos es el  $(0.6-3) \text{ mm}^{-1}$ . Por último en la figura 11c y en la 11d se representa el espectro asociado a la parte antisimétrica de  $Q_{22}$ .

## CONCLUSIONES

Se ha aplicado una teoría estadística de la turbulencia, la aproximación de interacción directa, al cálculo de los segundos momentos estadísticos de la velocidad fluctuante en un flujo turbulento inhomogéneo y anisótropo. La aproximación de interacción directa ya ha demostrado su validez para la turbulencia en flujos homogéneos e isotropos y en flujos homogéneos y anisotropos.

El cálculo se ha realizado en la región inercial del flujo turbulento, en un canal de lados paralelos infinitos. El flujo medio se supone conocido y las componentes de las fluctuaciones de velocidad se toman en puntos y/o tiempos distintos. Dada la complejidad de las ecuaciones se han hecho las siguientes aproximaciones:

El flujo se considera plano, pues existe una simetría entre las direcciones perpendiculares a la del flujo medio comprobada experimentalmente.

Se ha localizado la presión.

Se han estimado los órdenes de magnitud de los términos que intervienen en las ecuaciones de la DIA, a partir de datos experimentales, y de este estudio se ha concluido que es correcto seguir un procedimiento iterativo.

Debido a que es imposible determinar las condiciones iniciales y las de contorno en el límite entre la capa logarítmica y la región central del canal, se han introducido dos parámetros  $\lambda$  y  $\gamma$ . Para la estimación del orden de magnitud de los distintos términos que aparecen en la ecuación para las correlaciones, se da a estos parámetros valores tomados de las medidas de Comte-Bellot y Sabot. Al expresar

el resultado de los cálculos, el valor de estos parámetros se ha ajustado de forma que la anchura de la  $Q_{22}$  calculada es de 0.064 y la medida por Comte-Bellot de 0.078. No hemos considerado conveniente hacer un ajuste más fino porque Comte-Bellot no llega en sus medidas mas que hasta el límite entre la capa logarítmica y la región central del canal, y debido a la utilización para las medidas de sondas de hilos calientes hay que tomar como error mínimo de los valores experimentales un 20%.

De todo ello concluimos:

1.- Que es posible utilizar la DIA con estas aproximaciones para el cálculo en la región inercial de un flujo real, ya que se obtiene para las correlaciones entre fluctuaciones de velocidad un comportamiento que coincide cualitativamente con el que aparece en las medidas.

2.- Que se ha obtenido para la anchura de  $Q_{11}$  un valor de 0.45, mientras que el valor experimental es de 0.65.

3.- Que al estudiar las figuras que representan la variación en el tiempo de las correlaciones, resulta que las distancias dominantes corresponden a escalas intermedias mientras que al acercarnos al límite con la región central las distancias dominantes son las mínimas representadas. El primer necho está de acuerdo con lo observado en las visualizaciones de flujos y el segundo con las medidas de Sabot.

4.- Se comprueba que el espectro asociado a las correlaciones tiene una forma constante

5.- Se obtiene una escala de longitud asociada a los vórtices que coincide con la forma propuesta para la longitud de mezcla de Prandtl para esta región. Experimentalmente se ha comprobado que la

longitud de mezcla de Prandtl caracteriza la anchura de los vórtices en esta región.

6.-Para la constante de von Karman que aparece en la longitud de mezcla se obtiene un valor  $B=2.23$ , mientras que los valores experimentales van de 2.5 a 2.1.

7.-A partir de las funciones simétrica y antisimétrica, y del factor de intensidad asociado a las correlaciones, se ha determinado en forma gráfica las funciones espectrales universales  $f^{(0)}$  y  $f^{(1)}$ .

FIGURAS

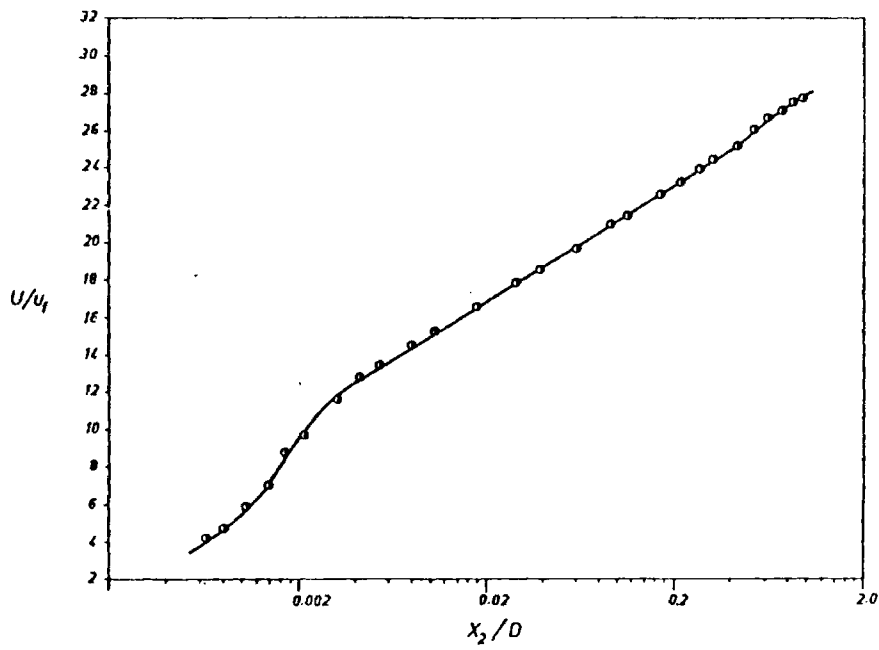


Fig. 1 (tomada de Comte-Bellot)  
 Perfil de la velocidad media  $U(x_2)$

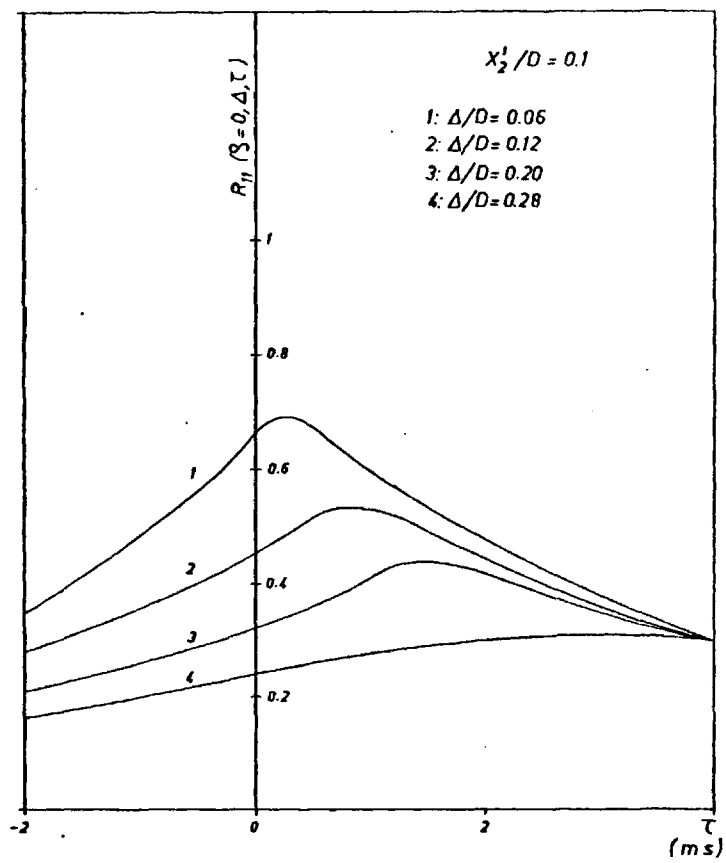


Fig. 2a (Tomada de Sabot, Tesis Doctoral)

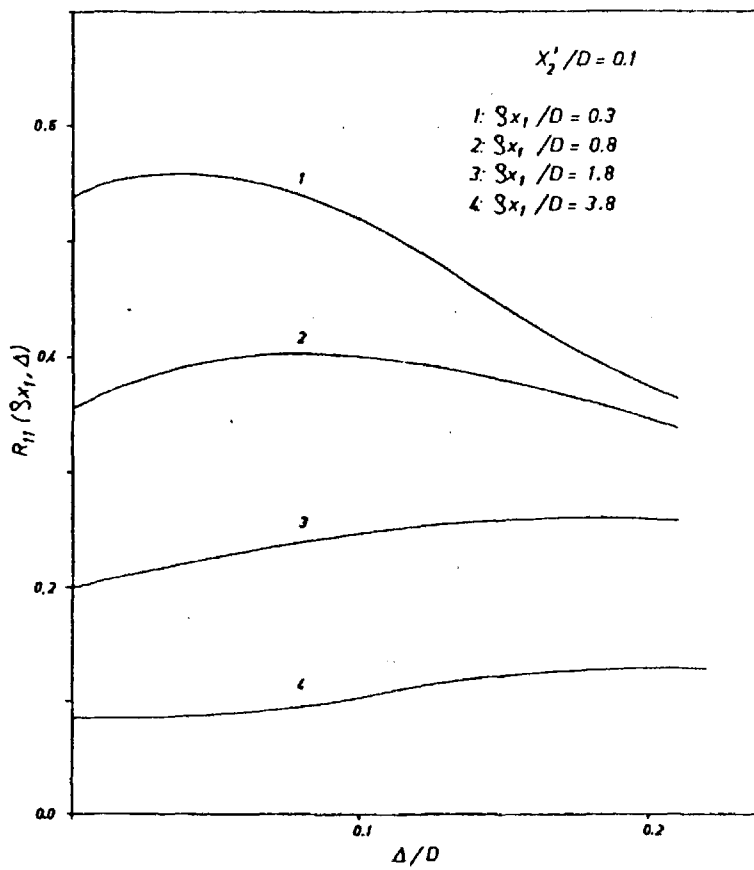


Fig. 2b (tomada de Sabot, Tesis Doctoral)



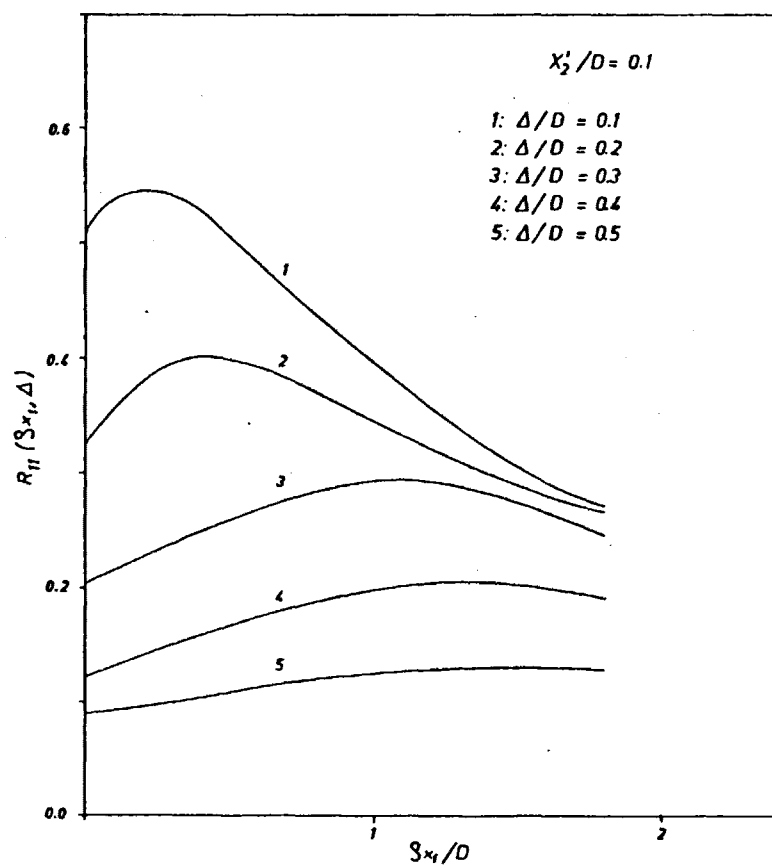


Fig. 2c (tomada de Sabot, Tesis Doctoral)

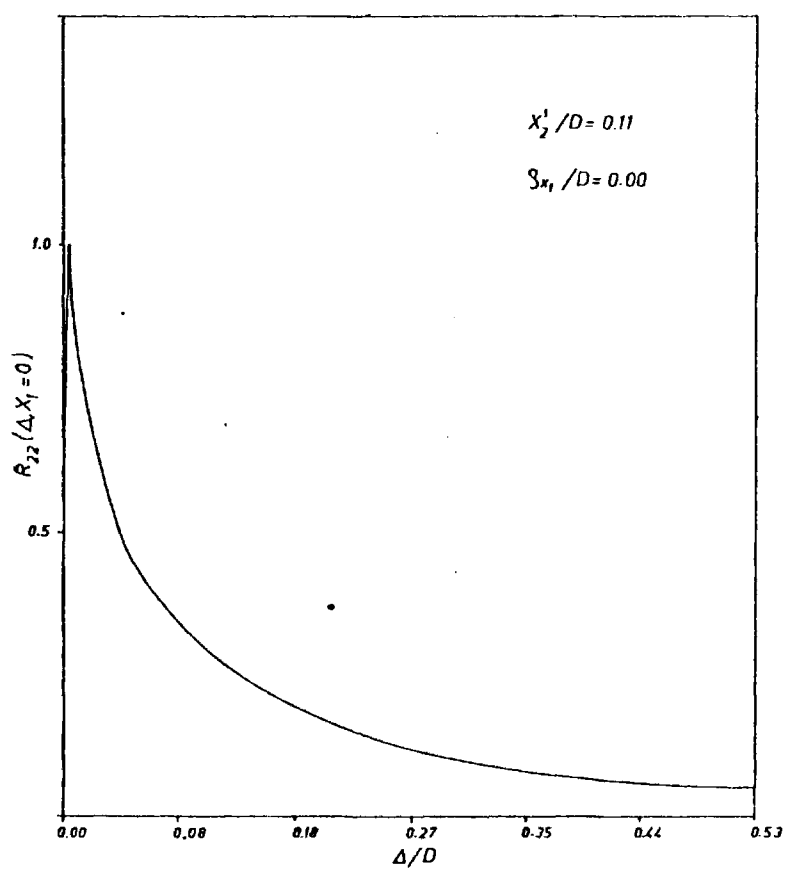


Fig. 3a (tomada de Conte-Bellot, (31))

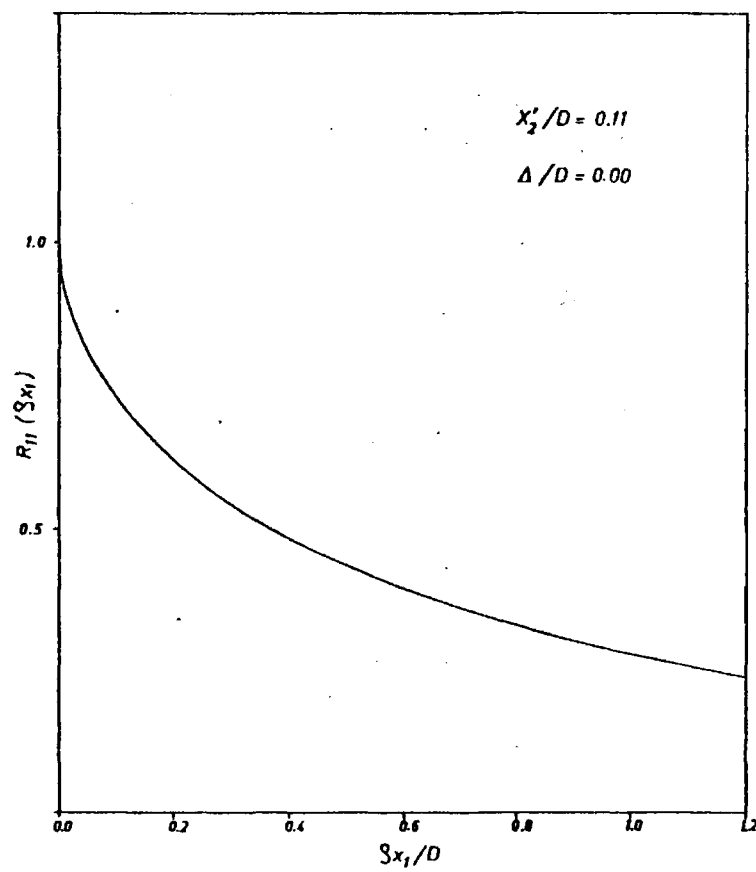


Fig.3b (tomada de Conte-Bellot, (31))

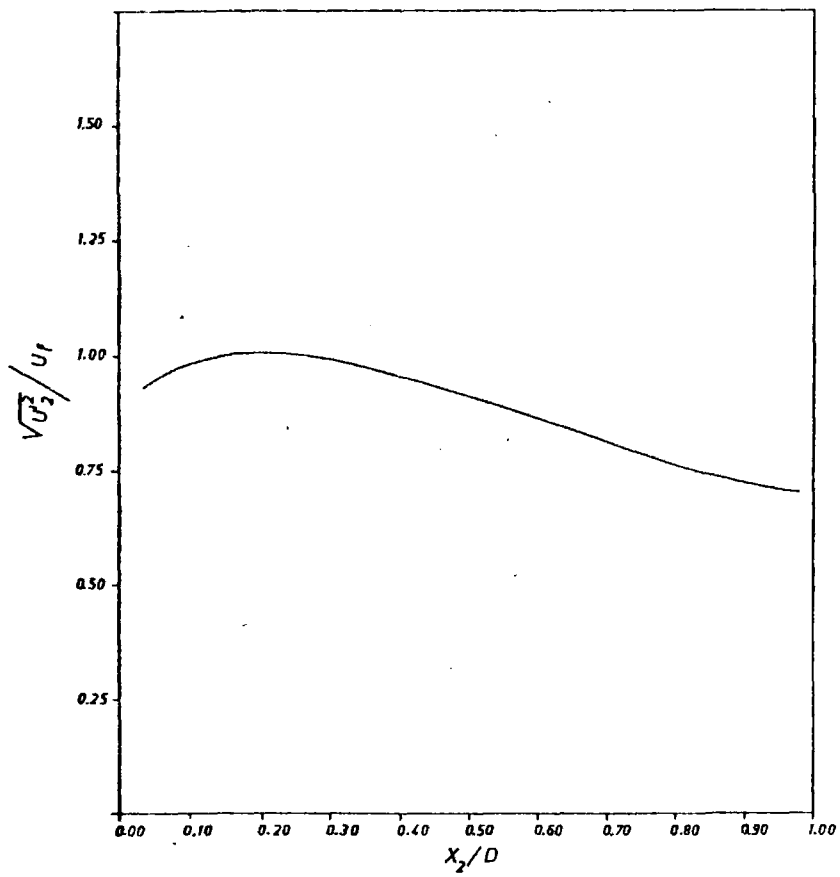


Fig 3c (tomada de Comte-Bellot, (31))

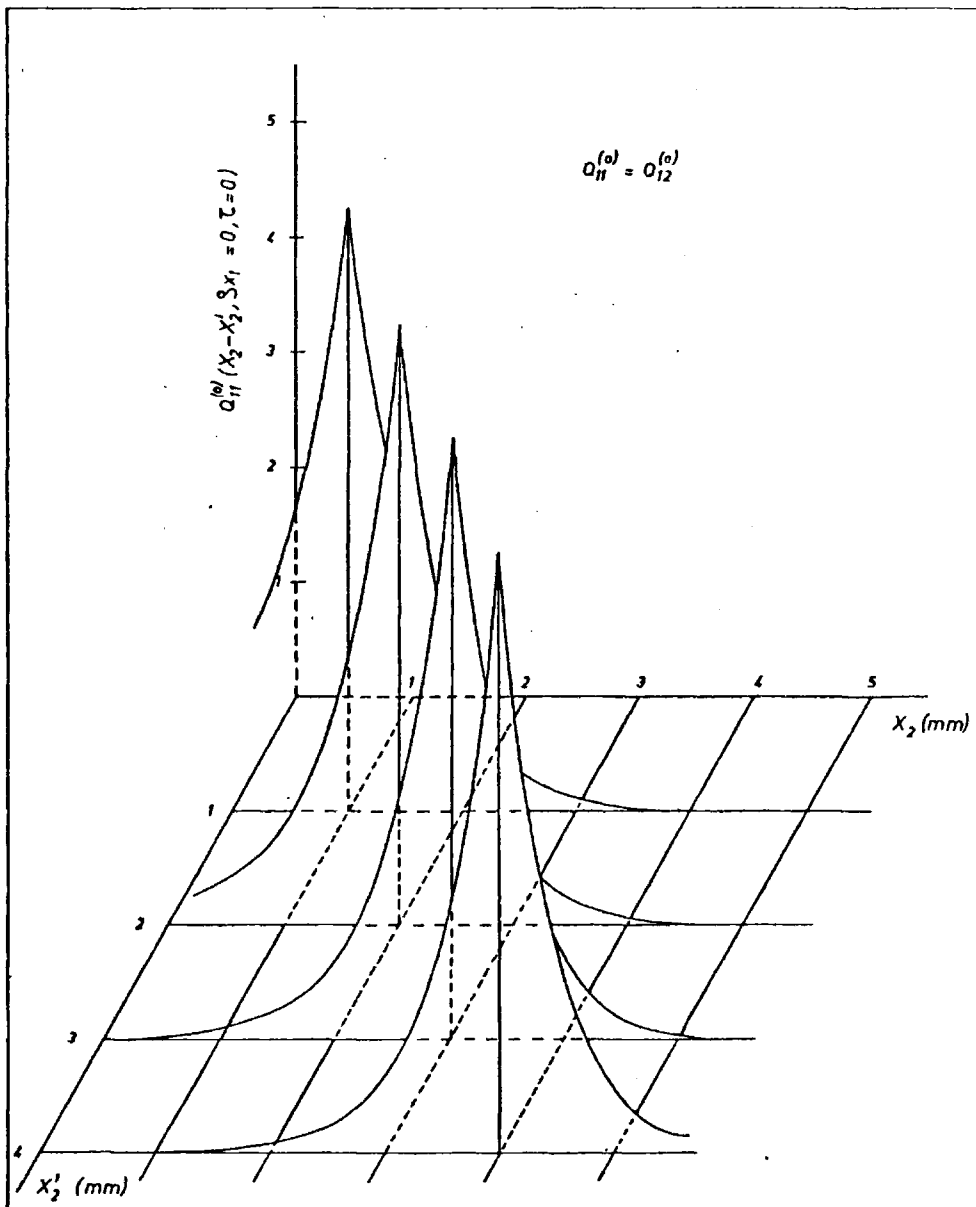


Fig. 4a

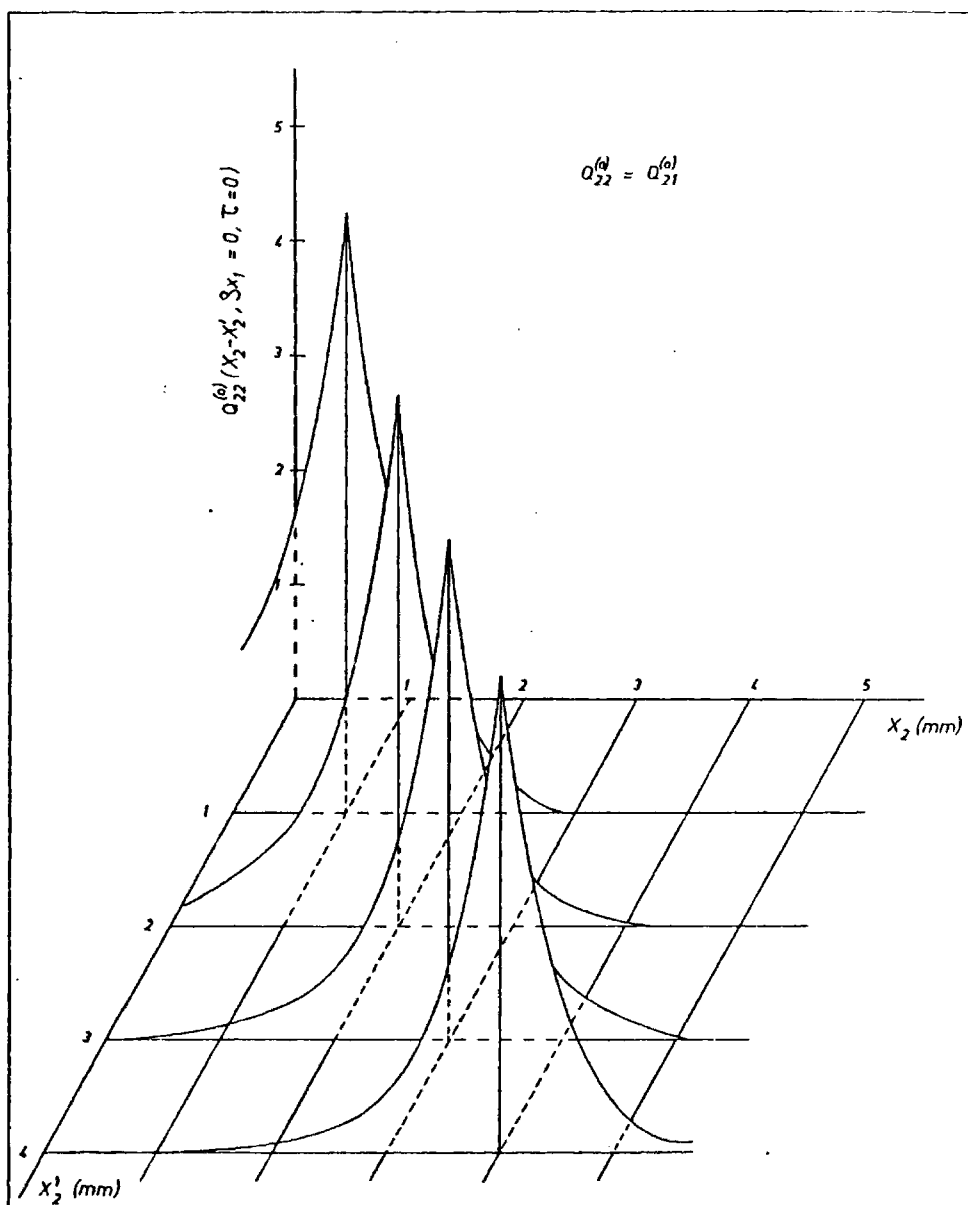


Fig. 4b

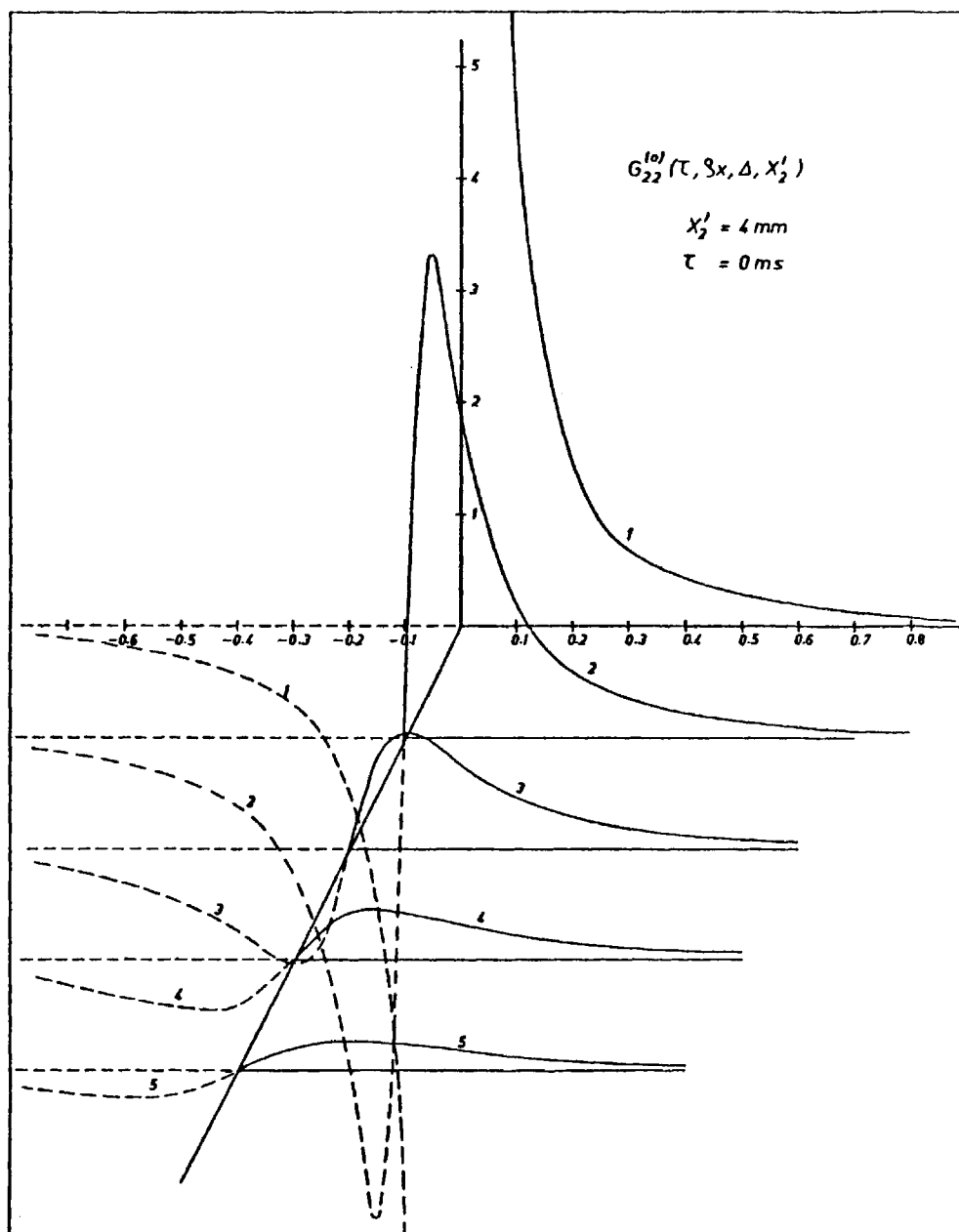


Fig. 4c

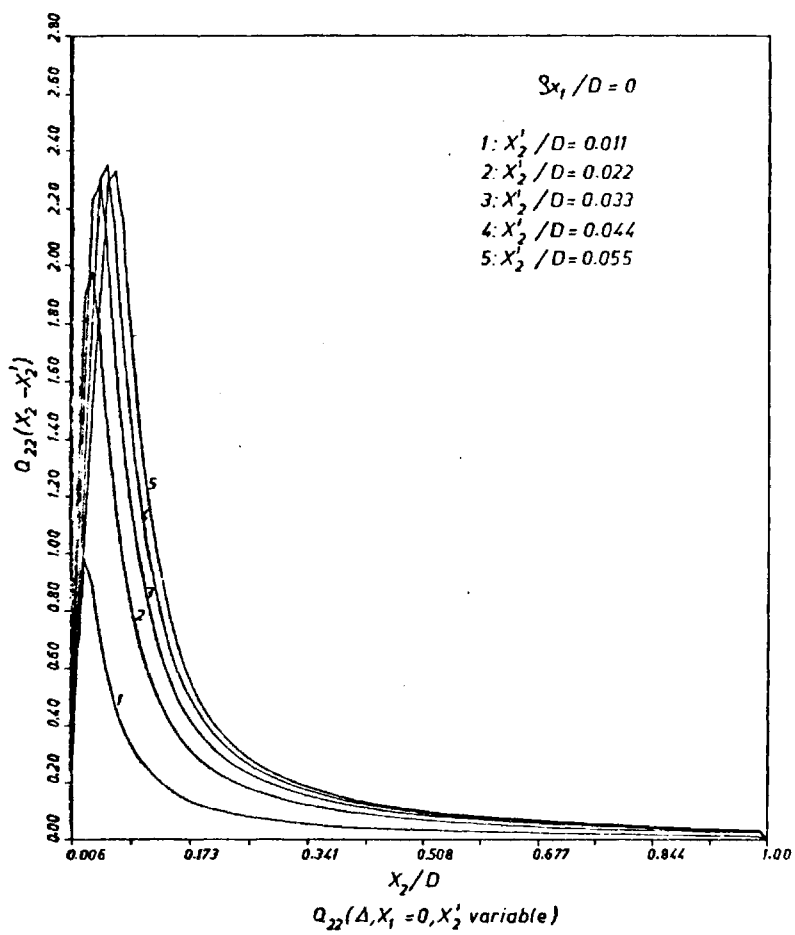
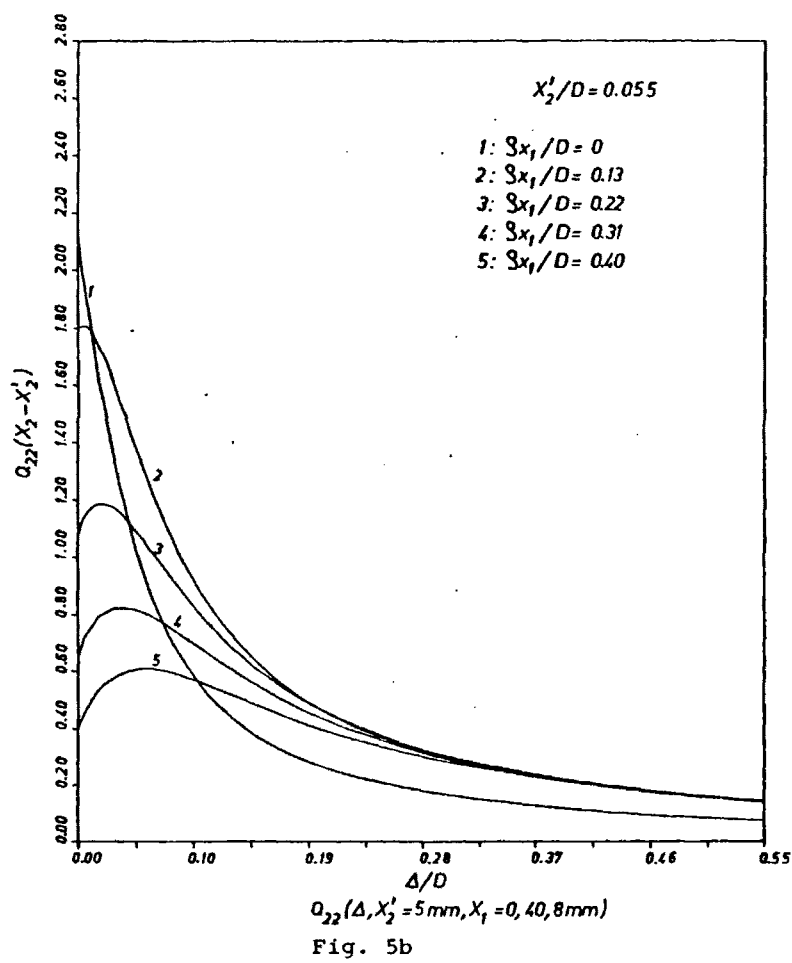


Fig. 5a





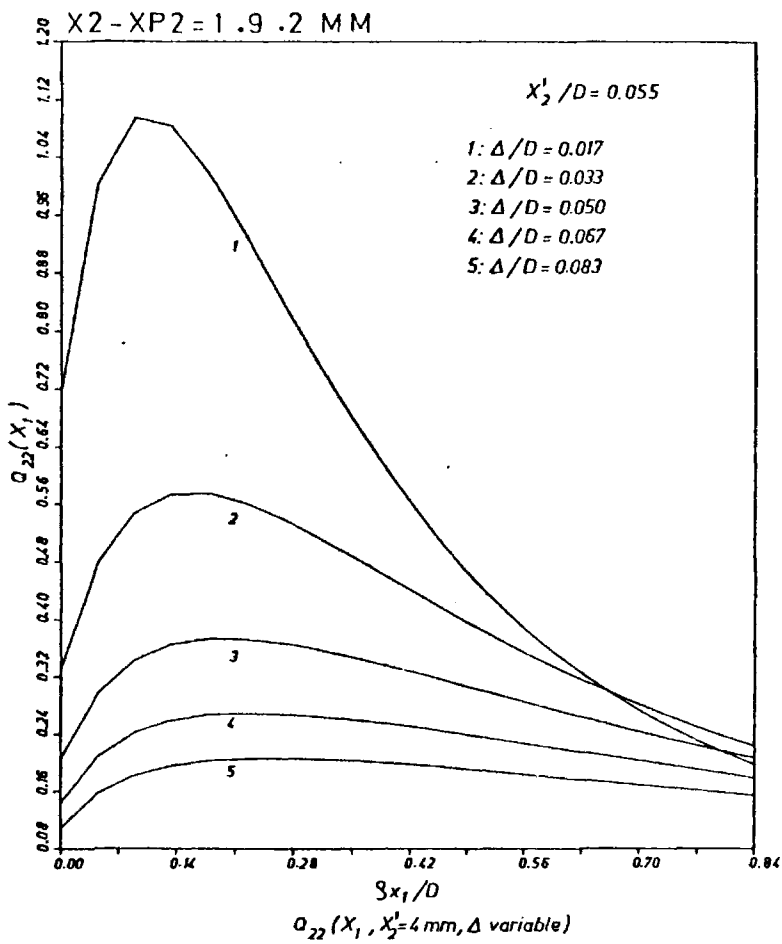


Fig. 5c

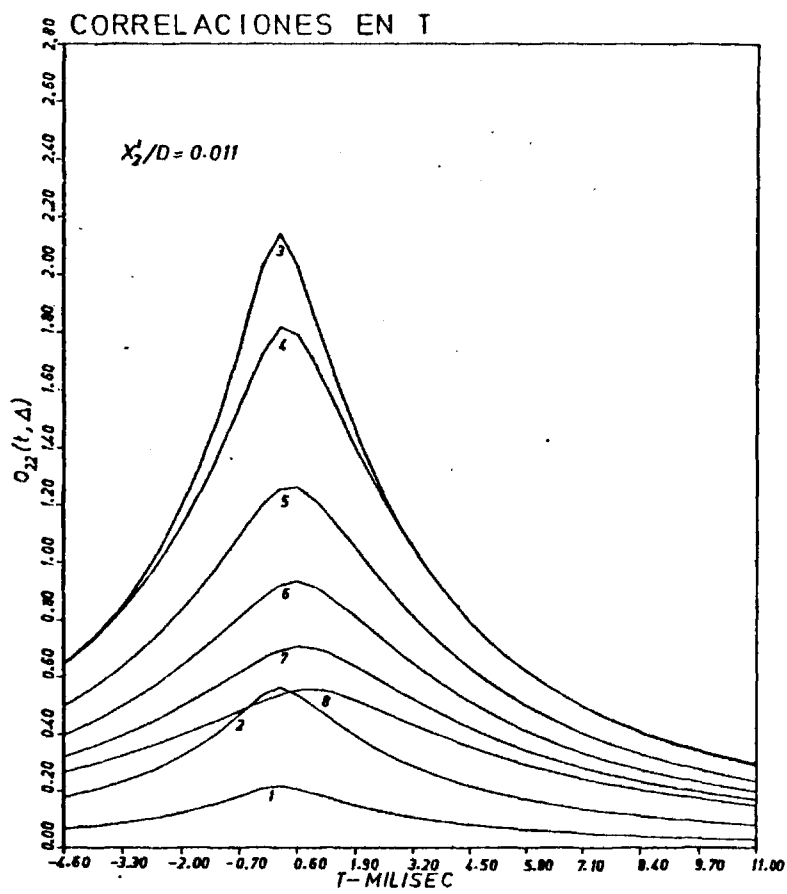


Fig. 6a

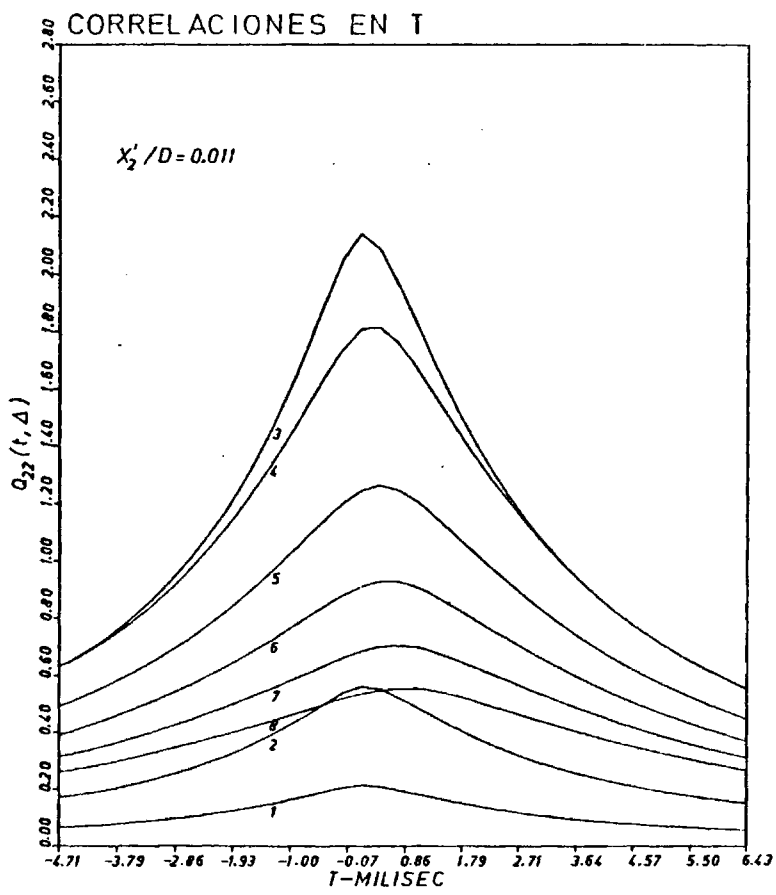


Fig. 6a'

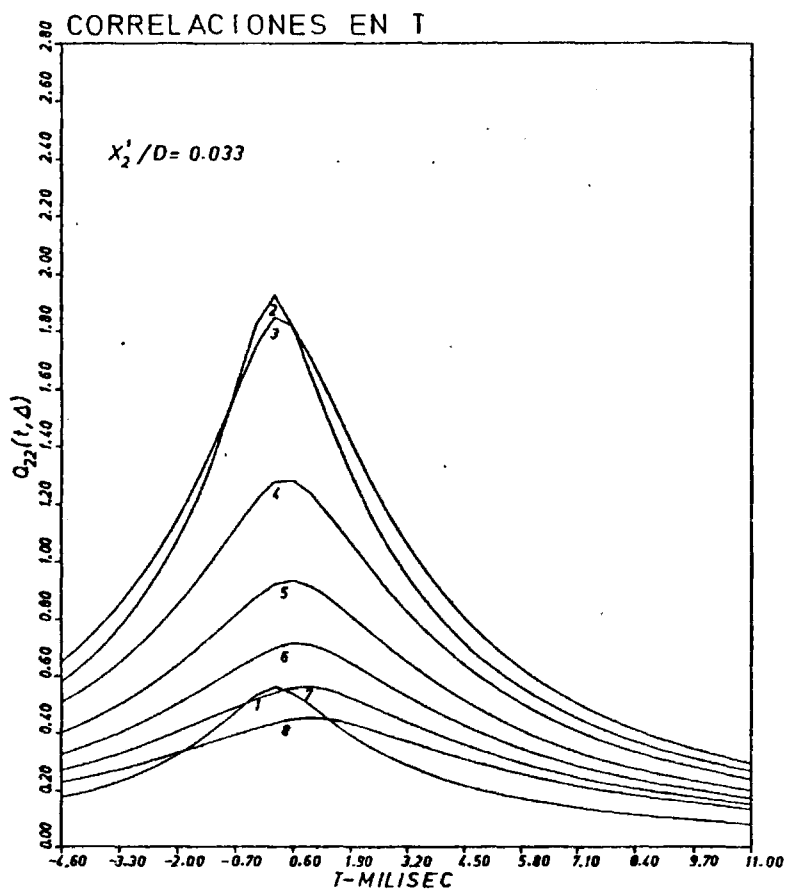


Fig.6b

[15]

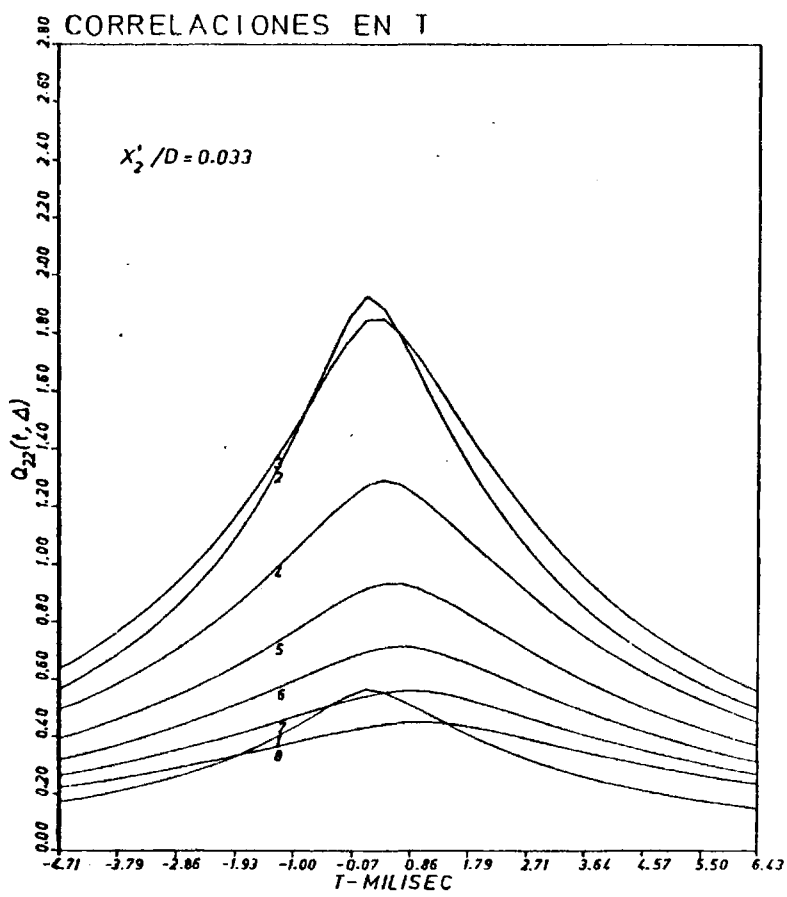


Fig. 6b'

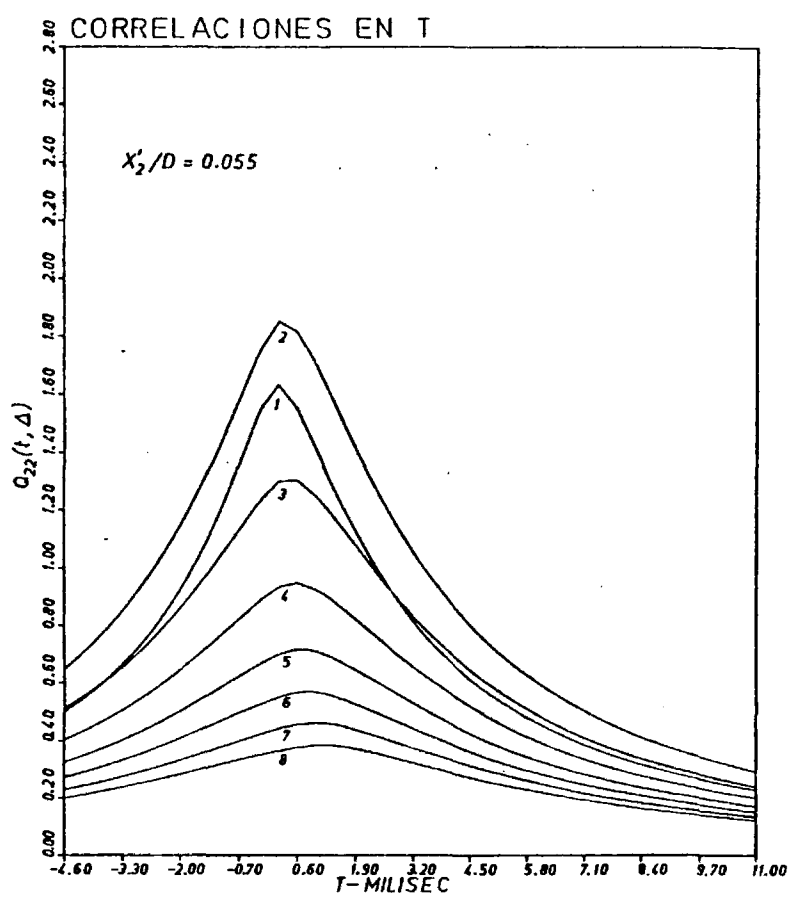


Fig. 6c

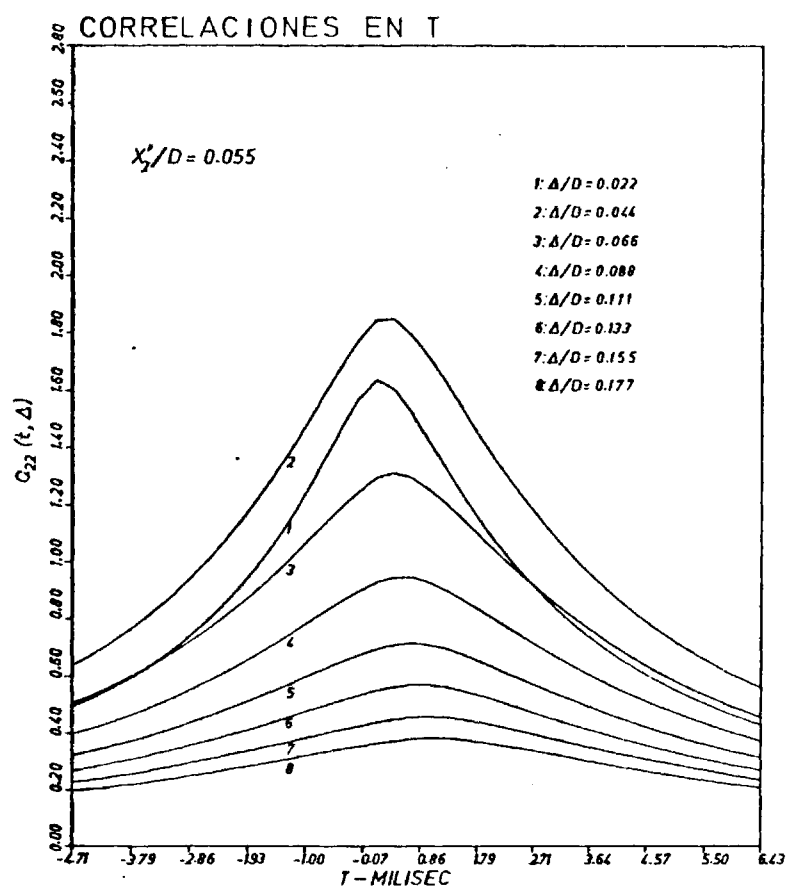


Fig.6c'



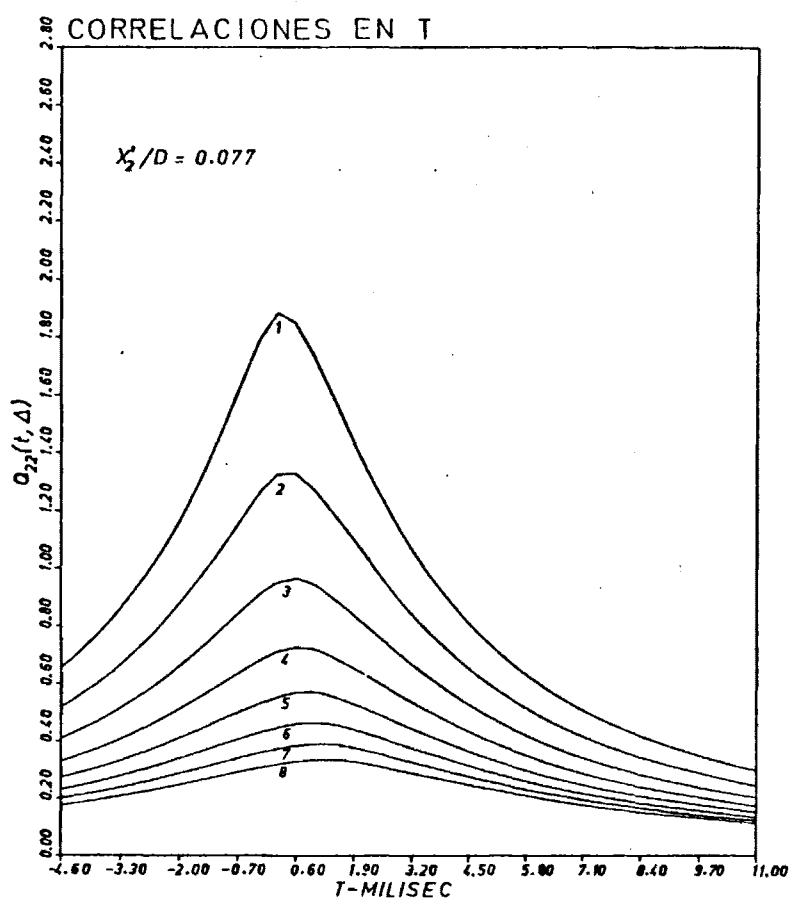
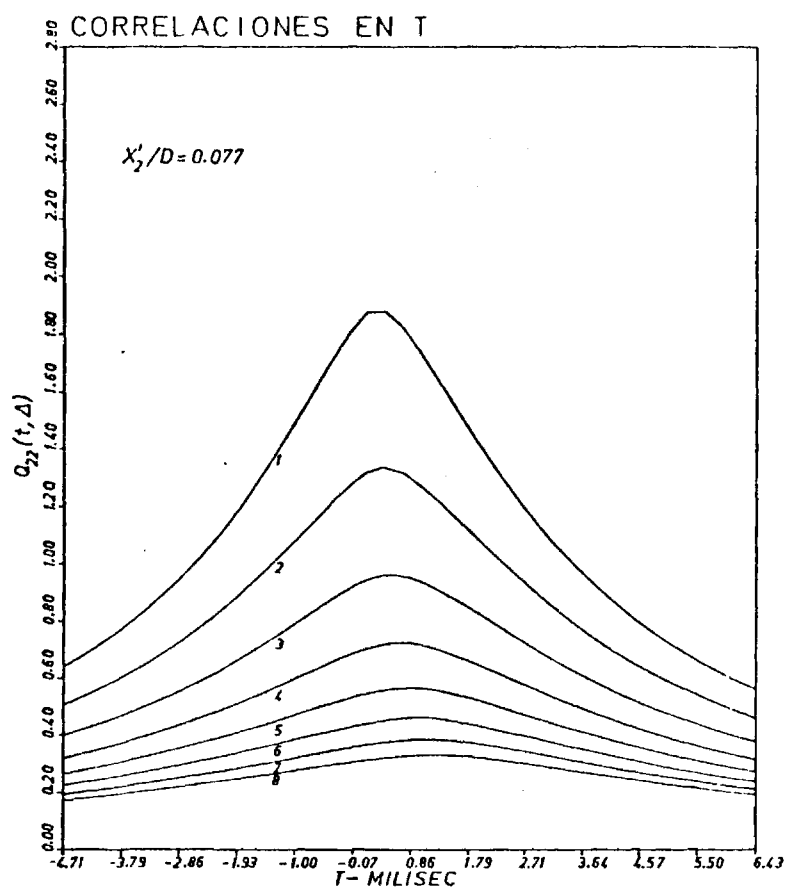


Fig. 6d



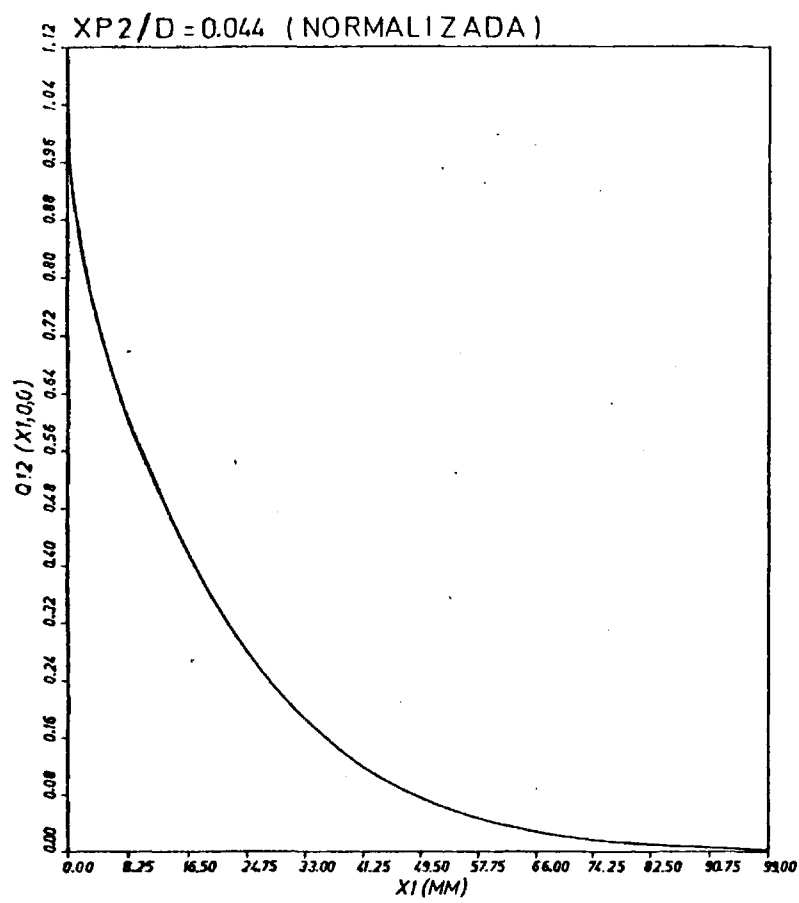


Fig. 7a

121

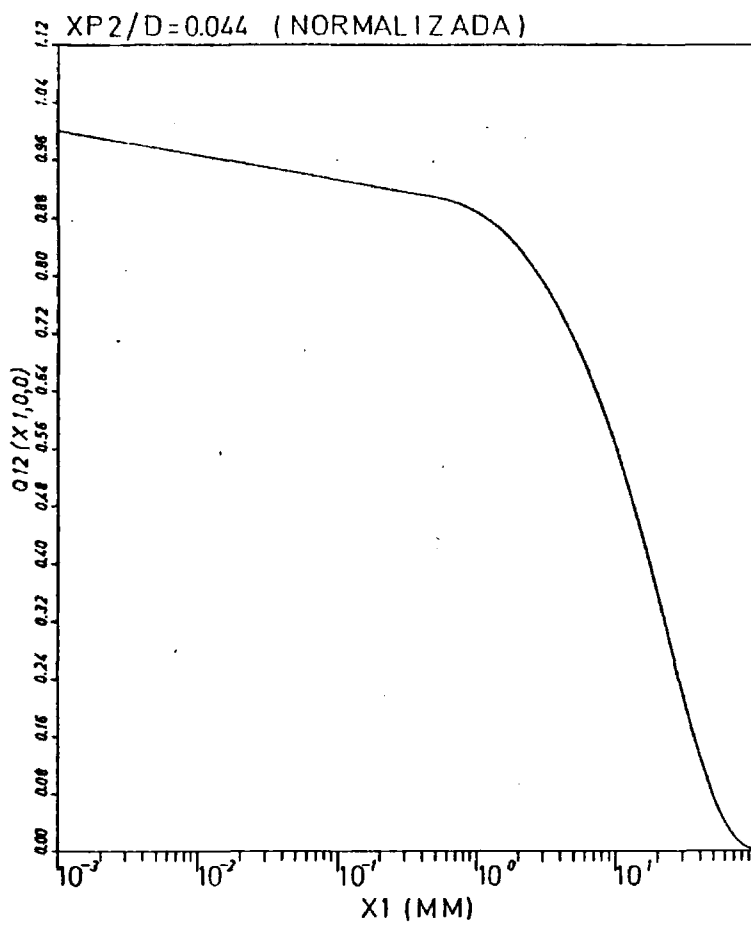


Fig. 7b

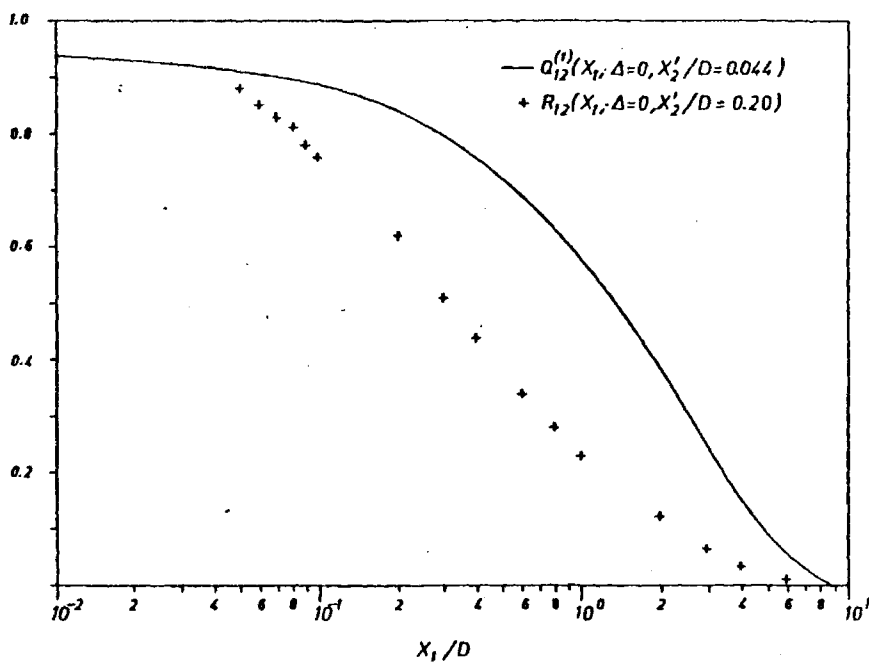


Fig. 7c

(v)

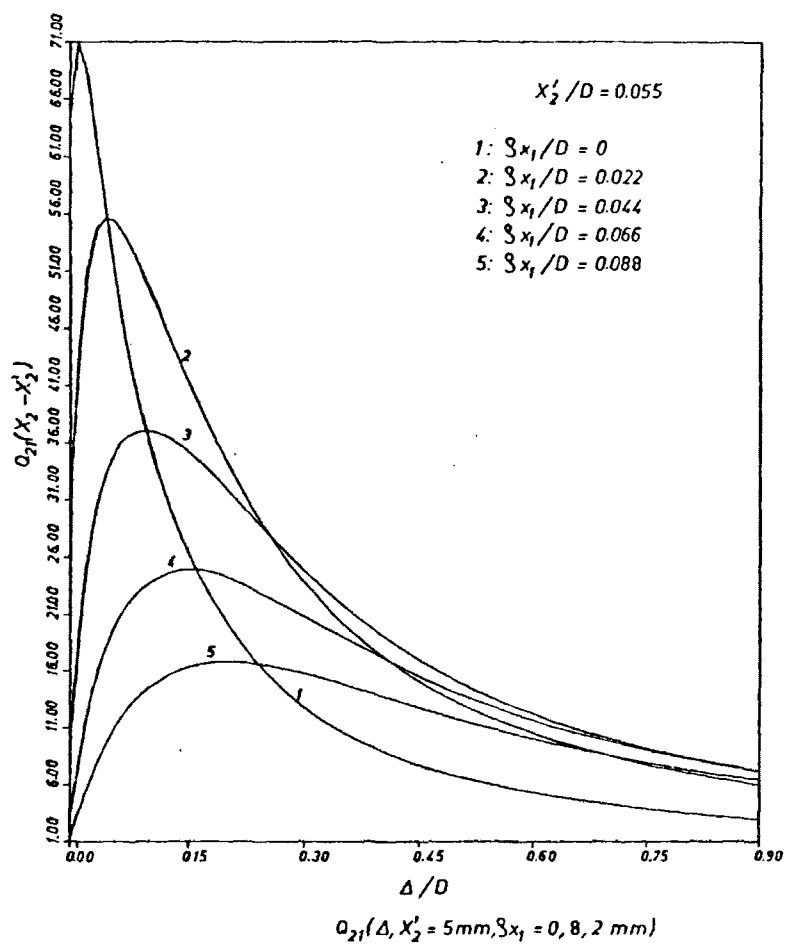


Fig. 8a

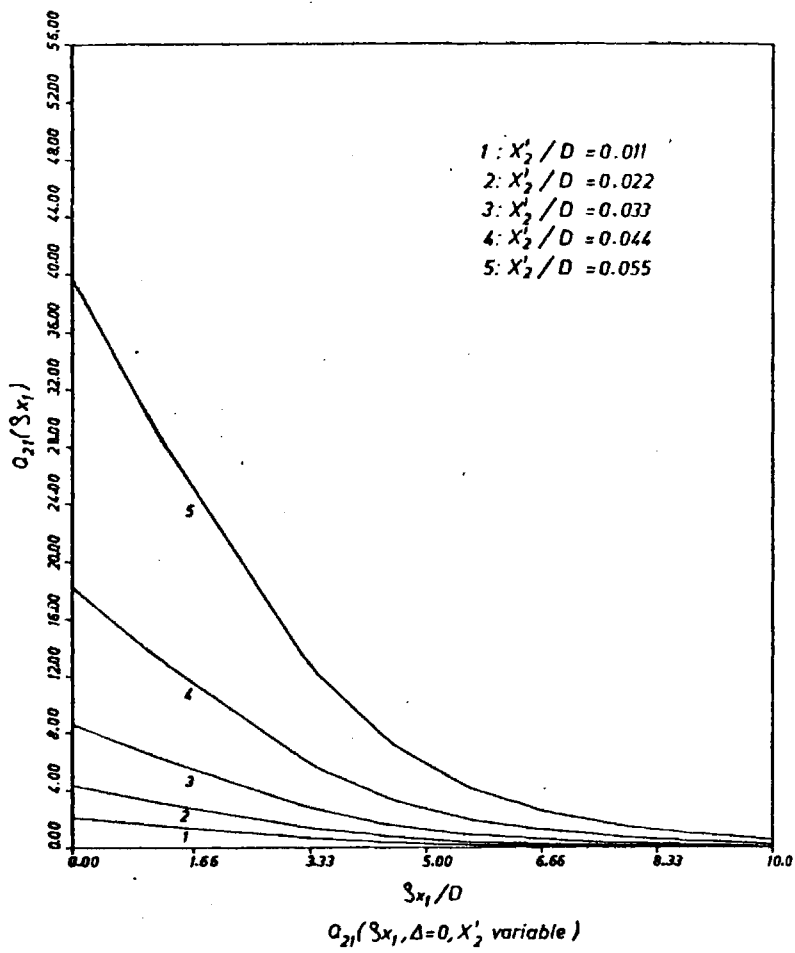


Fig. 8b

111

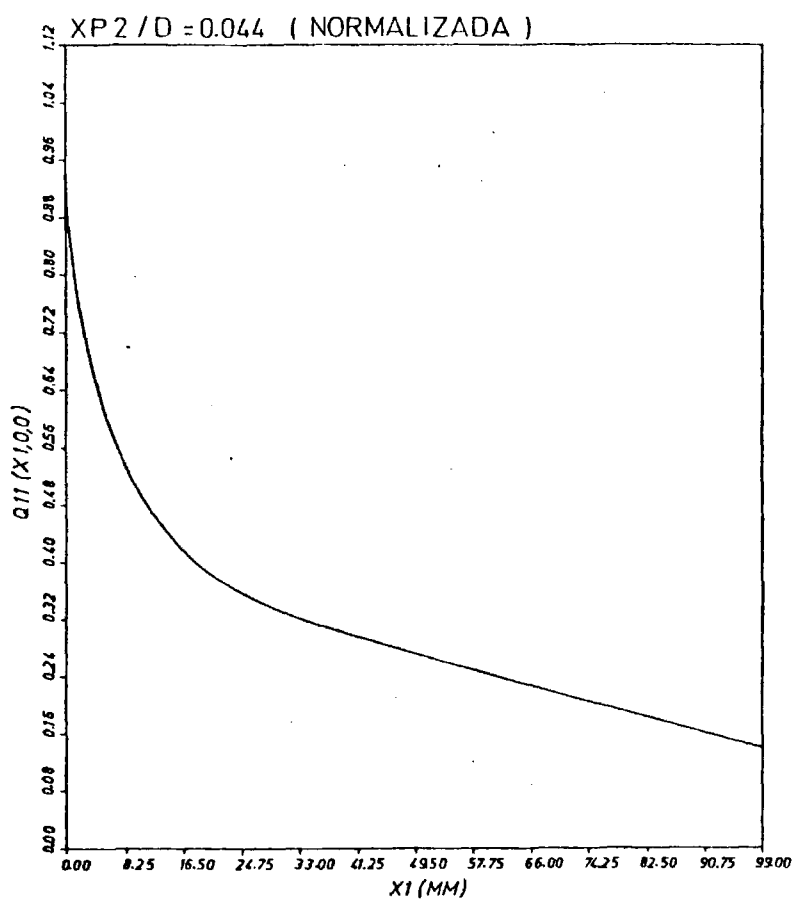


Fig. 9



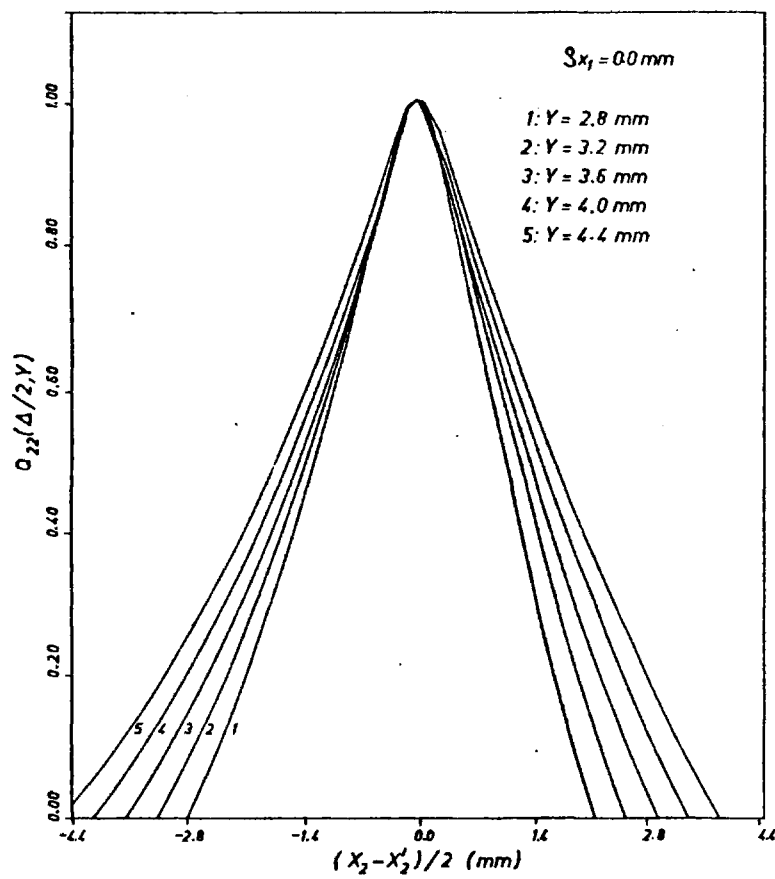


Fig. 10a

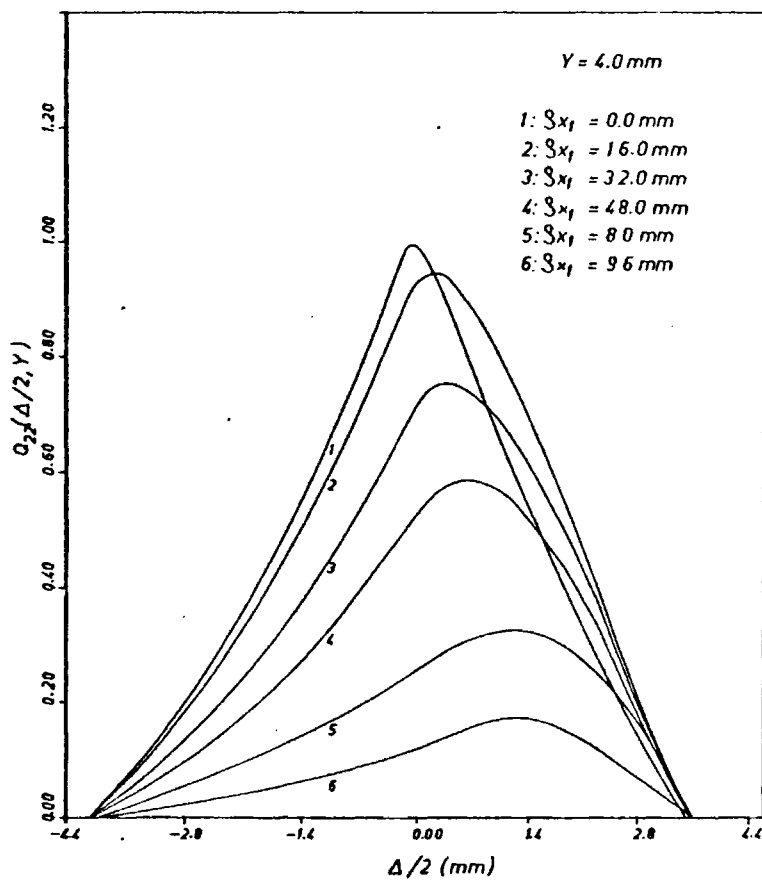


Fig. 10b

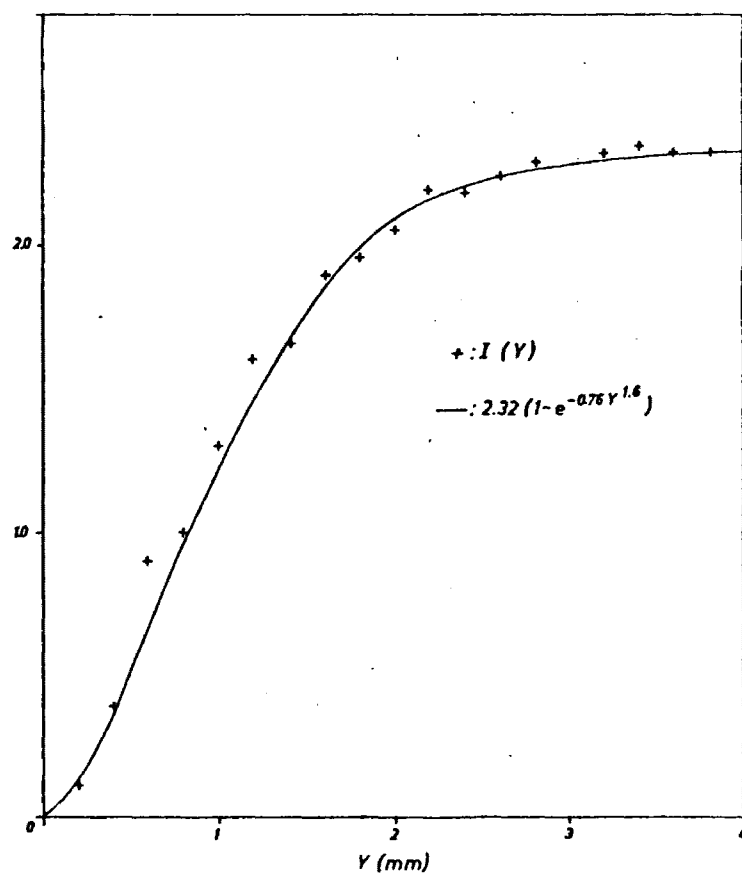


Fig. 10c

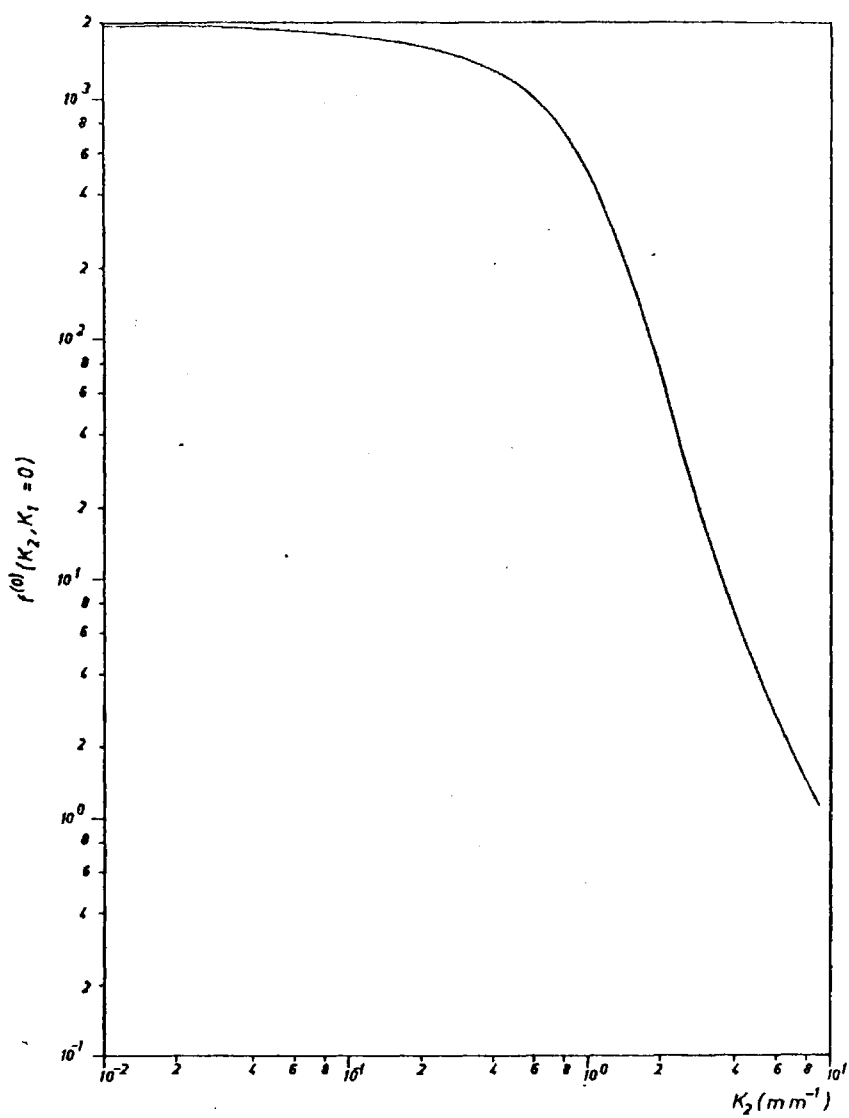


Fig. 11a

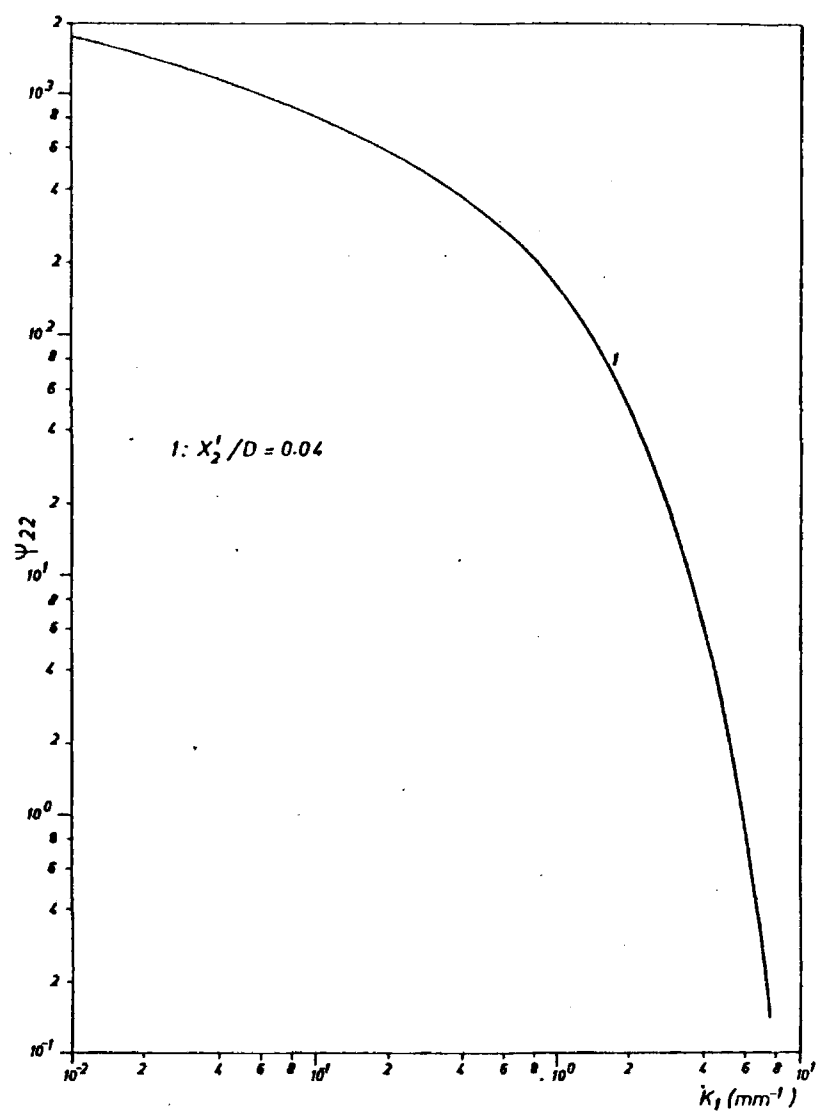


Fig. 11b

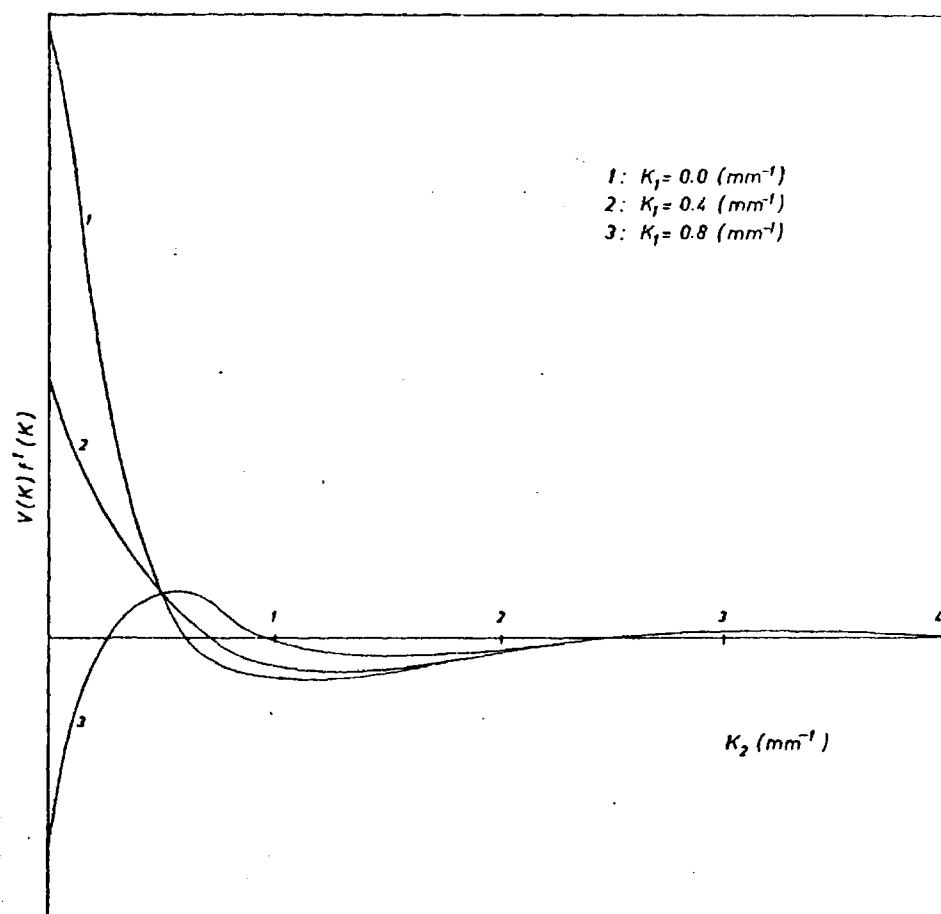


Fig. 11c

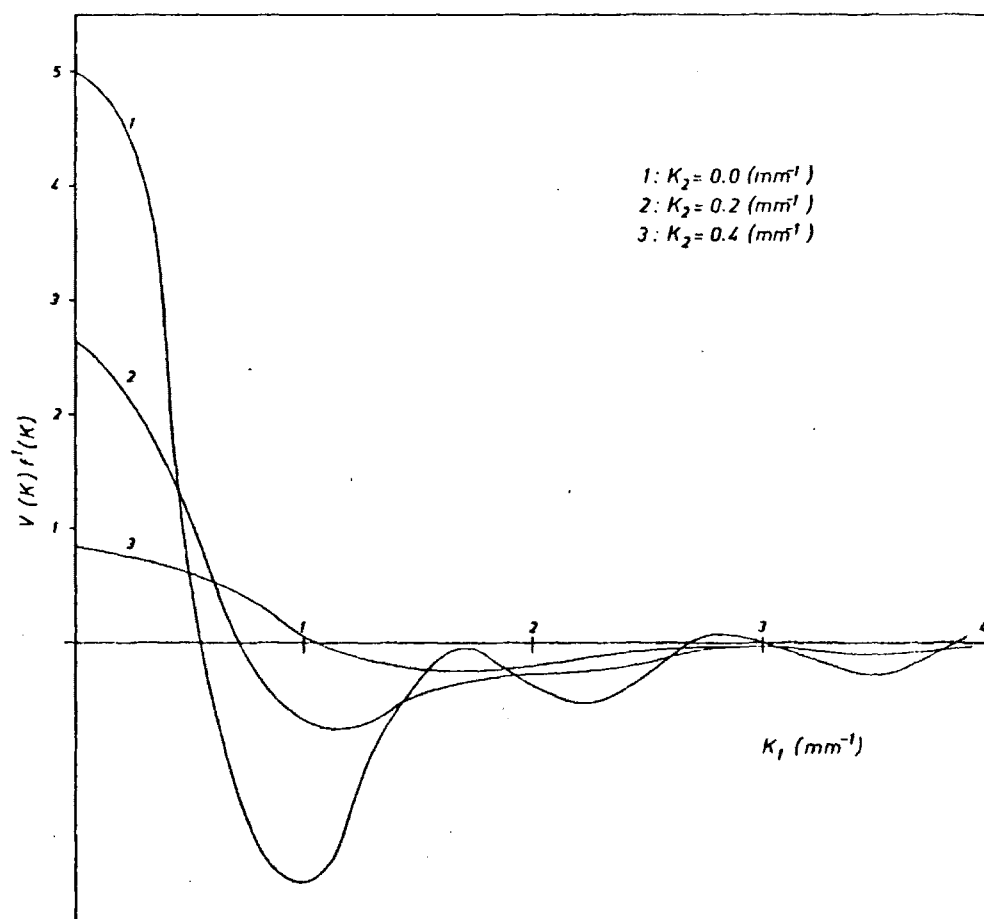


Fig. 11d

177

## APENDICES



# APENDICE 1.

Se trata de estudiar el comportamiento de la función  $D(x,y)$ , solución de

$$A-1 \quad \nabla_x^2 D(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

con condiciones de contorno de Neumann:  $\partial_{x_2} D(x,y) = 0$ ,  $x_2 = 0, 2h$ .

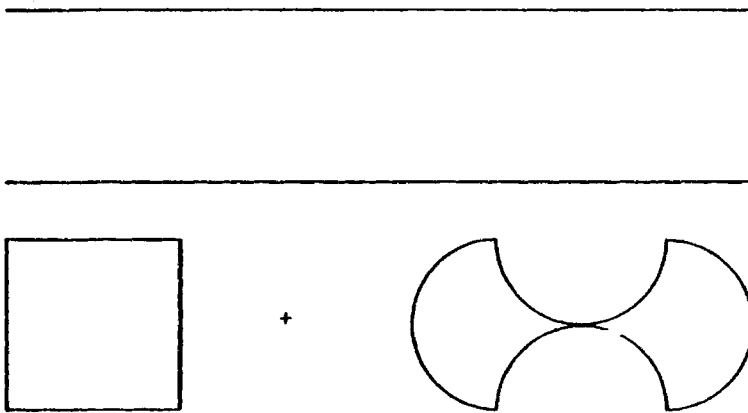
La forma exacta de  $D(x,y)$  se expresa mediante la serie:

$$A-2 \quad D(x,y) = 2h \sum_{n=1}^{\infty} (1/n\pi) \exp\{-((n-1)\pi/2h) |x_1 - y_1|\} \cos\{((n-1)\pi/2h)x_2\} \times \\ \times \cos\{((n-1)\pi/2h)y_2\}$$

Se trata de una expresión complicada y la serie converge muy lentamente. Su introducción complicaría enormemente los sistemas IV-29 y IV-30. Es evidente que debemos buscar para  $D(x,y)$  una aproximación sencilla. Para saber como se comporta  $D(x,y)$  utilizaremos un procedimiento analógico (42). Nos basaremos para ello en que el potencial electrostático también satisface una ecuación de Poisson. Utilizando esta analogía entre el potencial electrostático y nuestra función  $D(x,y)$ , bastará medir los valores relativos de dicho potencial en el dominio que nos interesa imponiendo condiciones de contorno de Neumann. A partir de estos valores relativos se puede representar la función o las curvas de nivel correspondientes.

El dominio se simulará mediante una superficie conductora de resistencia conocida, las condiciones de contorno se impondrán mediante fuentes o sumideros de tensión y para medir las diferencias de potencial puede utilizarse un voltímetro de alta sensibilidad o un método de puente de resistencias. Como el dominio que se quiere simular es infinito en

la dirección del flujo, es preciso buscar una forma de imponer la condición de contorno en el infinito. La ecuación A-1 es invariante bajo cualquier transformación conforme. Si el dominio se expresa como función de la variable compleja  $z=x+iy$ , la transformación  $W(u,v)=z^{-1}(x,y)$  es conforme y nos permite dividirlo en dos partes:



Basta asegurar la conexión eléctrica entre las líneas AB y la CD para que la equivalencia entre el dominio dibujado y el canal sea completa. Fijado el potencial cero en el punto  $(-\infty, \infty)$  y un potencial elevado arbitrario en un punto  $\vec{y}$  cualquiera del cuadrado ABCD, es posible levantar mediante medida directa las curvas de nivel correspondientes a  $D(\vec{x}, \vec{y})$ . La condición de Neumann en las fronteras AD, BC, AFD y BFC se impone dejándolas eléctricamente aisladas del exterior.

Para la realización práctica del dominio se eligió papel conductor marca SAFIR, empleado usualmente en equipos de SONAR, cuya resistencia

de  $4k\Omega$  por cuadrado. El potencial que se introdujo en el punto  $\vec{Y}$  fué de 25V. Las conexiones se realizaron utilizando papel de aluminio. Las curvas de nivel obtenidas aparecen en las figuras

Del análisis de estas curvas de nivel resulta que nuestra función  $D(\vec{x}, \vec{y})$  tiene un decrecimiento del 25% de su valor en un entorno del punto  $\vec{x} = \vec{y}$  cuyo radio es aproximadamente 0.1 h, y en el resto del canal el decrecimiento es relativamente lento. Para las derivadas de  $D(\vec{x}, \vec{y})$  que son las que aparecen con mayor peso en la expresión de los  $P_{ijk}(\vec{v}_y)$  el decrecimiento en dicho entorno es mucho mayor, mientras que, correspondientemente, fuera de dicho entorno estas derivadas son mas planas que la propia función  $D(x, y)$ . De aquí concluimos que la aproximación mas sencilla aceptable es sustituir  $D(x, y)$  y sus derivadas por funciones  $\delta$  de Dirac.

Si se efectúa esta aproximación en la expresión para los  $P_{ijk}(\vec{v}_y)$  de IV-10 y IV-11, sustituyendo en IV-29 y 30, y haciendo notar que en el entorno la diferencia entre  $D(\vec{x}, \vec{y})$  y su derivada en la dirección  $x_2$  es finita siempre, encontramos los sistemas IV-32 y 33.

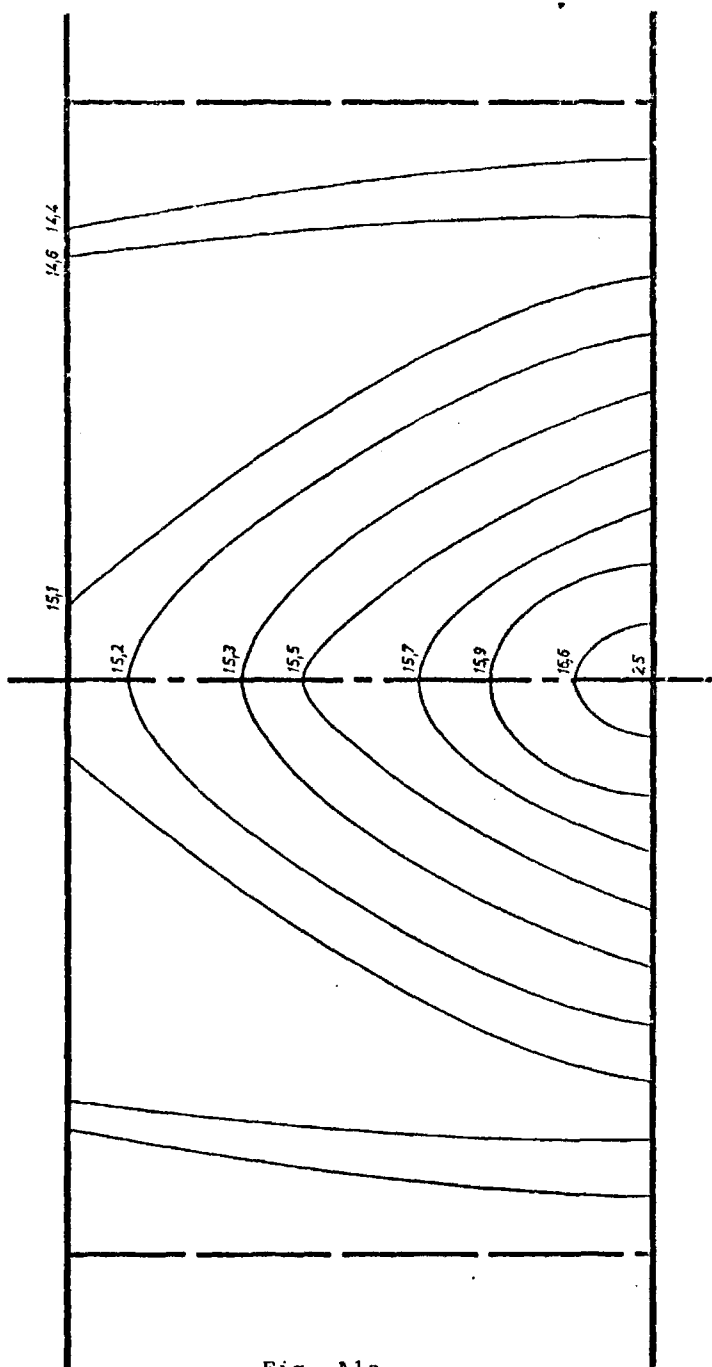


Fig. A1a

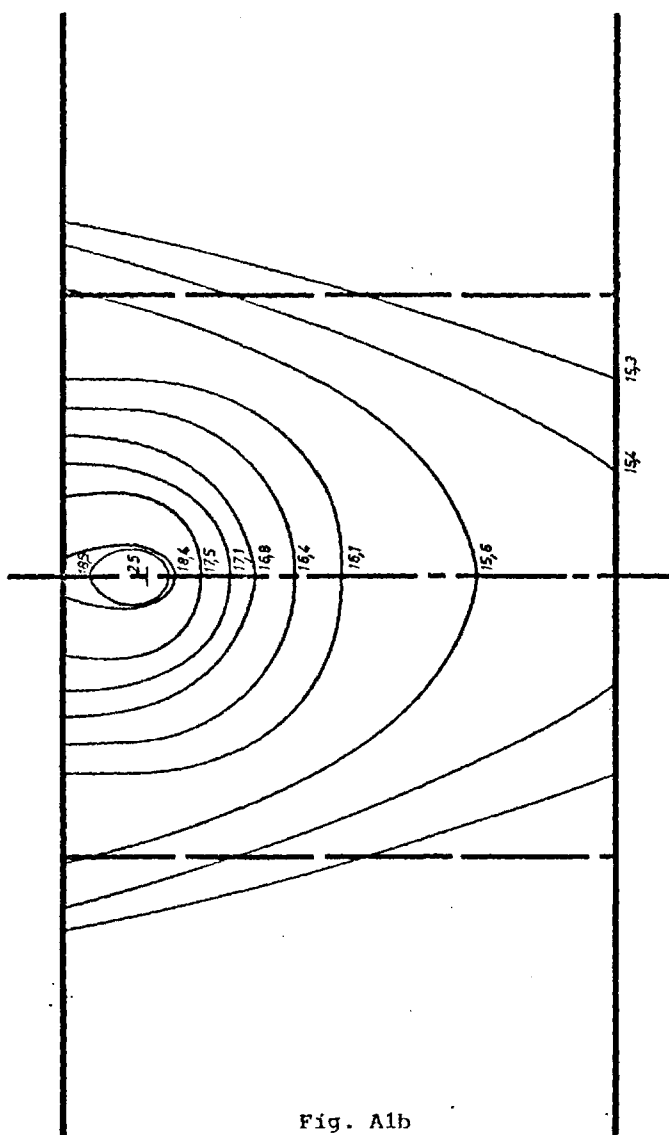


Fig. A1b

157

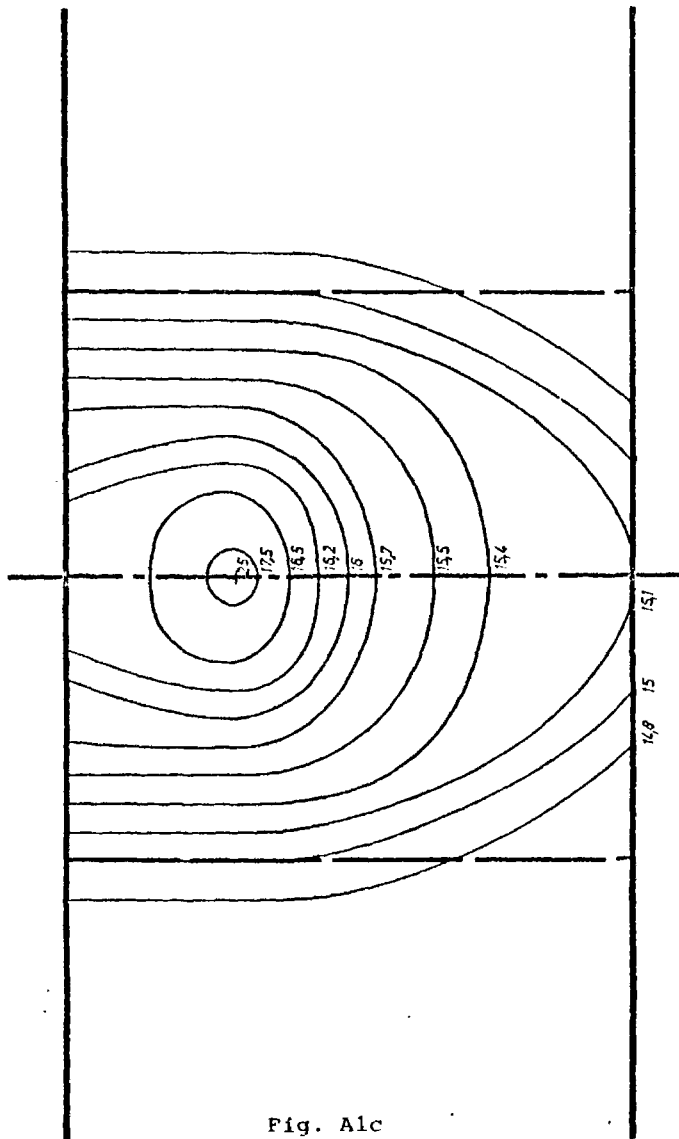


Fig. A1c

## APENDICE 2

El sistema de ecuaciones para las correlaciones (IV-34) en el orden cero de la iteración es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, cuasilíneal, de primer orden. Para su clasificación utilizaremos el método de las características (43).

El sistema puede ser escrito en la forma

$$A2-1 \quad L_j\{u\} = a^{ij,v} u_{x_v}^i + b_j = 0 \quad (j=1, \dots, k).$$

En esta expresión los coeficientes  $a^{ij,v}$  pueden ser funciones de  $x_v$  pero no de  $u^i$ , mientras que  $b_j$  puede ser función tanto de  $x_v$  como de  $u^i$ . El índice  $v$  varía de 1 a  $n$ . Los coeficientes  $a^{ij,v}$  pueden ser considerados como elementos de una matriz  $k \times k$ , que designamos por  $A$ . Para adoptar una notación matricial usamos la abreviatura  $u_{x_v} = u_v$  y escribimos el sistema como

$$A2-2 \quad L\{u\} = A^v u_v + b = 0.$$

$u$  y  $b$  serán ahora matrices filas o equivalentemente, vectores  $1 \times n$ .

Sea una superficie  $C$  caracterizada por una ecuación  $\phi(x) = 0$  donde  $\phi(x)$  es tal que  $\text{grad } \phi(x) \neq 0$ . Sobre  $C$  se considera una matriz característica

$$A = A^v \phi_v$$

y la forma característica asociada

$$Q(\phi_1, \dots, \phi_n) = \|A\|$$

Si  $Q \neq 0$  sobre  $C$ , se dice que la superficie  $C$  es libre. En caso contrario  $C$  es una superficie característica. Si para la ecuación  $Q=0$  no existe ningún conjunto de valores  $\phi_1, \dots, \phi_n$ , reales, que la satisfagan, el siste-

ma no tiene superficies características y se dice que es elíptico. Si fijados  $n-1$  valores para  $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ , existe un número menor o igual que  $k$  de soluciones reales  $\phi_n$  de la ecuación  $Q=0$ , el sistema es hiperbólico. Si fijados  $n-1$  valores para  $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ , existe un número mayor que  $k$  de soluciones reales  $\phi_n$  de la ecuación  $Q=0$ , el sistema es parabólico.

Debemos escribir IV-34 en la forma A2-1 e identificar los coeficientes  $a^{ij,v}$ . Para ello notemos  $x_v = t, x_1, x_2$ .

$$\begin{aligned} \text{A2-3} \quad & 1u_{x_1}^1 - 1f(x_3)u_{x_2}^2 = 0 \\ & 1u_{x_1}^2 - 2f(x_3)u_{x_2}^1 - (cte/x_3)u^2 - f(x_3)u_{x_3}^2 = 0. \end{aligned}$$

Procedemos a la identificación de coeficientes:

$$\begin{aligned} a^{11,1} &= 1, \quad a^{11,2} = 0, \quad a^{11,3} = 0, \quad a^{21,1} = 0, \quad a^{21,2} = -f(x_3), \quad a^{21,3} = 0, \\ a^{12,1} &= 0, \quad a^{12,2} = -2f(x_3), \quad a^{12,3} = 0, \quad a^{22,1} = 1, \quad a^{22,2} = 0, \quad a^{22,3} = -f(x_3) \end{aligned}$$

Las matrices  $A$  tienen la expresión:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -f(x_3) \\ -2f(x_3) & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -f(x_3) \end{bmatrix}$$

La matriz característica vendrá dada por

$$A^1\phi_1 + A^2\phi_2 + A^3\phi_3 = \begin{bmatrix} \phi_1 & -\phi_2 f(x_3) \\ -2\phi_2 f(x_3) & \phi_1 - \phi_3 f(x_3) \end{bmatrix}$$

y la ecuación para las características

$$Q = \phi_1(\phi_1 - \phi_3 f(x_3)) - 2\phi_2^2 f^2(x_3) = 0$$

Si fijamos dos de los  $\phi$ , p.ej.  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , resulta evidente que el valor de  $\phi_3$  depende de  $x_3$ , y por lo tanto, al existir mas de 3 valores distintos



de  $\phi_2$  el sistema es parabólico. Para reducirlo a una forma normal, hacemos  $a = f(x_3) = A \ln x_3 + B$  y estudiamos la forma cuadrática

$$x_1 - 2a^2 x_2^2 - ax_1 x_3$$

con la ecuación de autovalores

$$\begin{vmatrix} 1-\kappa & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2-\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La solución de esta ecuación da como autovalores

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = -2a^2.$$

Los autovectores correspondientes son

$$\kappa_1 \rightarrow (x_1, 0, -ax_1) \quad x_1 \text{ arbitrario}$$

$$\kappa_2 \rightarrow (0, x_2, 0) \quad x_2 \text{ arbitrario}$$

Estos vectores forman la matriz de transformación que nos permite pasar a la forma normal en coordenadas  $(y_1, y_2, y_3)$ :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{1+a^2} & 0 & -a/\sqrt{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

De aquí obtenemos:

$$\xi = y_1 = (1/\sqrt{1+a^2})(x_1 - ax_3)$$

$$\zeta = y_2 = -2a^2 x_2$$

$$y_3 = 0$$

Identificamos  $Q_{21}(x_1, x_2, x_3) = R(\xi, \zeta)$ . Si sustituimos las derivadas respecto a  $x_1, x_2$ , y  $x_3$  por derivadas respecto a  $\xi$  y  $\zeta$  vemos que el sistema de ecuaciones se reduce a la siguiente ecuación de segundo orden en las nuevas variables:

$$\partial_{\xi}^2 R(\xi, \zeta) - 8a^6 \partial_{\zeta}^2 R(\xi, \zeta) = 0 \quad \text{para } a = \text{cte.}$$

$a = \text{cte.}$  significa que esta transformación a coordenadas normales es solo válida para un entorno pequeño del cada punto del dominio, pudiendo variar la forma de la ecuación y de las coordenadas al pasar a otros puntos.

En un entorno de cada punto del dominio la solución general es:

$$R(\xi, \zeta) = R_1(\xi + 8a^6 \zeta) + R_2(\xi - 8a^6 \zeta).$$

No es posible afirmar que las funciones  $R_1$  y  $R_2$  sean las mismas para puntos distintos pertenecientes al dominio.

### APENDICE 3

#### Cálculo de $I_t^1$

$$I_t^1 = \int_{-\infty}^t ds G(t-s) Q(t-s) Q(-s) = \int_{-\infty}^0 ds G(t-s) e^{-\gamma(t-s)} e^{\gamma s} + \int_0^t ds G(t-s) e^{-\gamma(t-s) - \gamma s}$$

Calculamos en primer lugar

$$I_1 = e^{\gamma t} \int_{-\infty}^0 ds G(t-s) e^{-2\gamma(t-s)}$$

Hacemos el cambio de variable  $u = t-s$  y escribimos

$$B = G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2)$$

$$I_1 = e^{\gamma t} \int_t^{\infty} du \frac{e^{-2\gamma u}}{(u+B)^{3/2}}$$

Hacemos ahora sucesivamente los cambios: i)  $v = u+B$ , ii)  $v = \eta^2$ , iii)

$2\gamma\eta^2 = \xi^2$  y obtenemos:

$$I_1(\beta, \gamma, B) = 2e^{2\gamma B} \sqrt{2\gamma} \int_{\beta}^{\infty} d\xi \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2} = 2e^{2\gamma B} \sqrt{2\gamma} (e^{-\beta^2} / \beta + \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\beta))$$

Deshaciendo ahora los cambios anteriores de variables llegamos al siguiente resultado:

$$I_1(t, \gamma, B) = \frac{2e^{-\gamma t}}{(t+G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2))^{1/2}} + \\ + \sqrt{8\gamma} \exp(\gamma t + 2\gamma(G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2))) \operatorname{erfc}((2\gamma(t+G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2)))^{1/2})$$

De forma análoga procedemos para la segunda integral  $I_2$

$$I_2 = e^{-\gamma t} \int_0^t ds G(t-s)$$

Haciendo  $t-s = u$  obtenemos

$$I_2 = e^{-\gamma t} \int_0^t du / (u+B)^{3/2} =$$

$$= 2e^{-\gamma t} / (G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2))^{1/2} - 2e^{-\gamma t} / (t + G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2))^{1/2}$$

Uniendo ahora los dos resultados tenemos:

$$I_t^1 = 2e^{-\gamma t} / (G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2))^{1/2} +$$

$$+ \sqrt{8\gamma\pi} \exp(\gamma(t + 2(G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2)))) \operatorname{erfc} \sqrt{2\gamma(t + G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2))}$$

### Cálculo de $I_t^2$

$$I_t^2 = \int_0^t ds e^{-\gamma t + 2\gamma s} / ((t-s) + B)^{1/2} + \int_0^t ds e^{-\gamma t} / ((t-s) + B)^{1/2}$$

Realizando exactamente los mismos cambios de variable que en el caso anterior obtenemos el siguiente resultado:

$$I_t^2 = 2e^{-\gamma t} \sqrt{t + G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2)} - 2e^{-\gamma t} \sqrt{G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2)} +$$

$$+ \exp(\gamma(t + 2(G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2)))) \sqrt{\pi / 2\gamma} \operatorname{erfc}(\sqrt{2\gamma(t + G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2))})$$

### Cálculo de $I_1^*$

$$I_1^* = \int_{-\infty}^0 ds e^{2\gamma s} / (-s + G(x_2, y_2) + |x_1 - y_1|^2 / 4F(x_2, y_2))^{3/2}$$

Realizando cambios de variables análogos a los anteriores e integrando por partes, obtenemos:

$$I_1^* = 2 / (G(x_2', y_2) + |x_1' - y_1|^2 / 4F(x_2', y_2))^{1/2} + \frac{e^{2\gamma(G(x_2', y_2) + |x_1' - y_1|^2 / 4F(x_2', y_2))}}{(G(x_2', y_2) + |x_1' - y_1|^2 / 4F(x_2', y_2))^{1/4}} \times$$

$$\times \operatorname{erfc}(\sqrt{2\gamma(G(x_2', y_2) + |x_1' - y_1|^2 / 4F(x_2', y_2))})$$

Cálculo de  $I_2^*$ 

$$I_2^* = \int_{-\infty}^0 ds \, e^{2\gamma s} / (-s + G(x_2', y_2) + |x_1' - y_1|^2 / 4F(x_2', y_2))^{1/2} =$$

$$= \pi (G(x_2', y_2) + |x_1' - y_1|^2 / 4F(x_2', y_2))^{-1/4} -$$

$$\exp(2\gamma (G(x_2', y_2) + |x_1' - y_1|^2 / 4F(x_2', y_2))) \operatorname{erfc}(\sqrt{2\gamma (G(x_2', y_2) + |x_1' - y_1|^2 / 4F(x_2', y_2))})$$

## APENDICE 4

Cálculo de  $I_{x_1}^{11}$ 

$$I_{x_1}^{11} = (I_{x_1}^{11})_1 + (I_{x_1}^{11})_2 + (I_{x_1}^{11})_3$$

Utilizamos la siguiente notación :

$$\rho = x_1 - y_1 ; A = G(x_2, y_2) ; B = 2F(x_2, y_2) ; D = 2\gamma(t+A).$$

$$(I_{x_1}^{11})_1 = 2e^{-\gamma t + \lambda x_1} \int_{x_1}^{\infty} d\rho e^{-2\lambda \rho / (A + \rho^2 / 2B)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{8\gamma\pi}} e^{\gamma t + \lambda x_1 + 2\gamma G} \int_{x_1}^{\infty} d\rho e^{-2\lambda \rho + \frac{\gamma \rho^2}{2B}} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 4\gamma \rho^2 / B})$$

$$(I_{x_1}^{11})_2 = 2e^{-\gamma t - \lambda x_1} \int_0^{x_1} d\rho \rho / (A + \rho^2 / 2B)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{8\gamma\pi}} e^{\gamma t - \lambda x_1 + 2\gamma G} \int_0^{x_1} d\rho \rho e^{\frac{\gamma \rho^2}{2B}} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 4\gamma \rho^2 / B})$$

$$(I_{x_1}^{11})_3 = -2e^{-\gamma t - \lambda x_1} \int_0^{\infty} d\rho \rho e^{-2\lambda \rho / (A + \rho^2 / 2B)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{8\gamma\pi}} e^{\gamma t - \lambda x_1 + 2\gamma G} \int_0^{\infty} d\rho \rho e^{-2\lambda \rho + \frac{\gamma \rho^2}{2B}} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 4\gamma \rho^2 / B})$$

Para el primer sumando de estas integrales  $I_{x_1}^{11}$  hacemos  $\sqrt{2BA} = \mu$ ,

$2\lambda\mu = \alpha$  ,  $\mu^{-1}x_1 = \beta$  ,  $x = \rho/\mu$  , queda:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{\infty} d\rho \rho e^{-2\lambda \rho / (A + \rho^2 / 2B)^{1/2}} &= 2B\sqrt{A} \int_{\beta}^{\infty} dx x e^{-\alpha x / (1+x^2)^{1/2}} \\ \int_0^{\beta} d\rho \rho / (A + \rho^2 / 2B)^{1/2} &= 2B\sqrt{A} \int_0^{\beta} dx x / (1+x^2)^{1/2} \\ -\int_0^{\infty} d\rho \rho e^{-2\lambda \rho / (A + \rho^2 / 2B)^{1/2}} &= -2B\sqrt{A} \int_0^{\infty} dx x e^{-\alpha x / (1+x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Para el segundo sumando de  $(I_{x_1}^{11})_{1,2,3}$  hacemos  $\delta = \sqrt{2B/\gamma} x_1$  y  $\phi = 2\lambda\sqrt{2B/\gamma}$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{\infty} d\rho \rho e^{-2\lambda \rho + \gamma \rho^2 / 2B} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 4\gamma \rho^2 / B}) &= 2B/\gamma \int_{\delta}^{\infty} dx x e^{-\phi x + x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 8x^2}) \\ \int_0^{x_1} d\rho \rho e^{\gamma \rho^2 / 2B} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 4\gamma \rho^2 / B}) &= 2B/\gamma \int_0^{\delta} dx x e^{x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 8x^2}) \\ -\int_0^{\infty} d\rho \rho e^{-2\lambda \rho + \gamma \rho^2 / 2B} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 4\gamma \rho^2 / B}) &= -2B/\gamma \int_0^{\infty} dx x e^{-\phi x + x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 8x^2}) \end{aligned}$$

A continuación introducimos algunos símbolos auxiliares mas:

$$\begin{aligned} y_1^1 &= \int_0^\infty dx \, x \, e^{-\alpha x} / (1+x^2)^{1/2} & , & & y_4^1 &= \int_0^\infty dx \, x \, e^{-\phi x + x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{D+8x^2}) \\ y_2^1 &= \int_0^\beta dx \, x \, e^{-\alpha x} / (1+x^2)^{1/2} & , & & y_5^1 &= \int_0^\delta dx \, x \, e^{-\phi x + x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{D+8x^2}) \\ y_3^1 &= \int_0^\beta dx \, x / (1+x^2)^{1/2} & , & & y_6^1 &= \int_0^\delta dx \, x \, e^{x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{D+8x^2}) \end{aligned}$$

Procedemos en primer lugar al cálculo de  $y_2^1$ . Si realizamos el cambio de variables  $u = x/\sqrt{10}$  queda:

$$y_2^1 = \sqrt{10} \int_0^{\beta/\sqrt{10}} du \, u \, e^{\alpha\sqrt{10}u} / (0.1+u^2)^{1/2} = \sqrt{10} \, I_1(\beta/\sqrt{10}, \alpha/\sqrt{10})$$

La integral  $I_1(\beta/\sqrt{10}, \alpha/\sqrt{10})$  se ha calculado mediante una aproximación numérica como:

$$I_1(\chi, \psi) = (1 - e^{-\chi\psi})/\psi - (1/\sqrt{10} + \psi)(1 - e^{-(\sqrt{10} + \psi)\chi})$$

con lo que tenemos para  $y_2^1$

$$y_2^1 = (1 - e^{-\alpha\beta})/\alpha - (1/\sqrt{10} + \alpha)(1 - e^{-(\sqrt{10} + \alpha)\beta})$$

Para calcular  $y_1^1$  basta hacer tender  $\beta \rightarrow \infty$  en la expresión anterior. De todo ello resulta:

$$\int_{x_1}^\infty d\rho \, \rho \, e^{-2\lambda\rho} / (A + \rho^2/2B)^{1/2} = 2B\sqrt{A} (e^{-(0.1+\alpha)\beta} / (0.1+\alpha) - e^{-\alpha\beta} / \alpha)$$

De forma inmediata se obtiene:

$$\int_0^{x_1} d\rho \, \rho / (A + \rho^2/2B)^{1/2} = 2B\sqrt{A} (\sqrt{1 + (x_1/\alpha BA)^2})$$

En forma análoga abordamos el cálculo de  $y_6^1$ . Aproximamos el integrando numéricamente

$$x e^{x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{D+8x^2}) \approx 22.57 \, x \, e^{-(x+2.3)^2} e^{-1.4D}$$

$$y_6^1 \approx 22.57 \, e^{-1.4D} \int_0^\delta dx \, x \, e^{-(x+2.3)^2}$$

La última integral es del orden de magnitud de  $10^{-3}$  por lo que podemos prescindir de  $\gamma_6^1$  en el cálculo de  $I_{x_1}^{11}$ .

Mediante la misma aproximación numérica vamos a calcular  $\gamma_4^1$

$$\gamma_4^1 = 22.57 e^{-1.4D} \int_0^\infty dx x e^{-\phi x} e^{-(x+2.3)^2}$$

Desarrollando el exponente del integrando y realizando por partes la integral de la expresión anterior escribimos:

$$\int_0^\infty dx x e^{-x^2 - (4.6+\phi)x} = -0.5 e^{-x^2 - (4.6+\phi)x} \Big|_0^\infty - 0.5(4.6+\phi) \int_0^\infty dx e^{-x^2 - (4.6+\phi)x}$$

y de aquí

$$\gamma_4^1 = 11.28(4.6+\phi) 0.9 e^{(4.6+\phi)^2/4 - 5.4} \operatorname{erfc}((4.6+\phi)/2) e^{-1.4D} \approx 0$$

Por último, para  $\gamma_5^1$  tenemos:

$$\begin{aligned} \gamma_5^1 &= 22.57 e^{-1.4D} \int_0^\delta dx x e^{-(x^2 + (4.6+\phi)x + 5.4)} = \\ &= (22.57/2) e^{-5.4} (1 - e^{-\delta^2 - (4.6+\phi)\delta}) \approx 0 \end{aligned}$$

Combinado los resultados anteriores nos queda:

$$I_{x_1}^{11} = 2e^{-\gamma t - \lambda x_1} \frac{1}{2B\sqrt{A}} \left( \frac{e^{-x_1/10\sqrt{2BA}} - 1}{2\lambda + 1/10\sqrt{2BA}} \right) + 2e^{-\gamma t - \lambda x_1} \frac{1}{\sqrt{2B}\sqrt{2BA+x_1^2}}$$

Cálculo de  $I_{x_1}^{01}$

Descomponemos  $I_{x_1}^{01}$  en tres partes

$$I_{x_1}^{01})_1 = 2e^{-\gamma t + \lambda x_1} \int_{x_1}^\infty d\rho e^{-2\lambda\rho/(A+\rho^2/2B)} \frac{1}{\sqrt{8\gamma\pi e}} \gamma t + 2\gamma G + \lambda x_1 \int_{x_1}^\infty d\rho e^{-2\lambda\rho + \gamma\rho^2/2B} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + \frac{4\gamma\rho^2}{B}})$$

$$I_{x_1}^{01})_2 = 2e^{-\gamma t - \lambda x_1} \int_0^{x_1} d\rho/(A+\rho^2/2B) \frac{1}{\sqrt{8\gamma\pi e}} \gamma t + 2\gamma G - \lambda x_1 \int_0^{x_1} d\rho e^{\gamma\rho^2/2B} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 4\gamma\rho^2/B})$$

$$I_{x_1}^{01})_3 = 2e^{-\gamma t - \lambda x_1} \int_0^\infty d\rho e^{2\lambda\rho/(A+\rho^2/2B)} \frac{1}{\sqrt{8\gamma\pi e}} \gamma t + 2\gamma G - \lambda x_1 \int_0^\infty d\rho e^{2\lambda\rho + \gamma\rho^2/2B} \operatorname{erfc}(\sqrt{D + 4\gamma\rho^2/B})$$



Si como en el caso anterior introducimos los siguientes símbolos:

$$\begin{aligned} Y_1^0 &= \int_0^\infty dx e^{-\alpha x} / (1+x^2)^{1/2}, & Y_4^0 &= \int_0^\infty dx e^{-\phi x + x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{D+8x^2}) \\ Y_2^0 &= \int_0^\beta dx e^{-\alpha x} / (1+x^2)^{1/2}, & Y_5^0 &= \int_0^\beta dx e^{-\phi x + x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{D+8x^2}) \\ Y_3^0 &= \int_0^\beta dx / (1+x^2)^{1/2}, & Y_6^0 &= \int_0^\beta dx e^{x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{D+8x^2}) \end{aligned}$$

podemos mediante ellos escribir las integrales que definen cada uno de los términos de  $I_{x_1}^{01}$ . Si las indicamos como  $I_{11}$  e  $I_{12}$ , correspondiendo a la expresión para  $I_{x_1}^{01})_1$  y análogamente para  $I_{x_1}^{01})_2$  y para  $I_{x_1}^{01})_3$ , tenemos:

$$\begin{aligned} I_{11} &= 2B(Y_1^0 - Y_2^0), & I_{12} &= \sqrt{2B/\gamma} (Y_4^0 - Y_5^0) \\ I_{21} &= 2B Y_3^0, & I_{22} &= \sqrt{2B/\gamma} Y_6^0 \\ I_{31} &= 2B Y_1^0, & I_{32} &= \sqrt{2B/\gamma} Y_4^0. \end{aligned}$$

Para realizar estas últimas integrales procedemos como anteriormente mediante ajustes numéricos:

$$Y_2^0 \approx (E_1(1+\alpha)\beta) - E_1(\alpha\beta) + \ln((1+\alpha)/\alpha)$$

Para  $Y_1^0$  hacemos tender en la expresión anterior  $\beta \rightarrow \infty$ :

$$Y_1^0 \approx \ln((1+\alpha)/\alpha)$$

$Y_3^0$  se obtiene por cuadratura directa:

$$Y_3^0 = (1/2) \ln(2\sqrt{1+x_1^2} + 2x_1)$$

De la misma manera que se ha obtenido en el análisis de  $I_{x_1}^{11}$ , las expresiones  $Y_4^0, Y_5^0$ , e  $Y_6^0$  son despreciables respecto a los otros términos.

$$\begin{aligned} I_{x_1}^{01} &\approx 4e^{-\gamma t + \lambda x_1} \sqrt{2B} (E_1((x_1/10\sqrt{2BA}) + 2\lambda x_1) - E_1(2\lambda x_1)) + 4e^{-\gamma t - \lambda x_1} \sqrt{2B} \ln(1 + 1/20\lambda \sqrt{2B}) \\ &\quad + 2e^{-\gamma t - \lambda x_1} \sqrt{2B} \ln(2x_1/\sqrt{2BA} + 2/(1+x_1/\sqrt{2BA})) \end{aligned}$$

# APENDICE 5

De la misma manera que en el caso de las integrales a  $y_1$ , en el cálculo de  $B$  hay que recurrir a aproximaciones numéricas. Para ello hay que encontrar previamente una de estas aproximaciones para las funciones  $F(x_2, y_2)$  y  $G(x_2, y_2)$ . Estas funciones son demasiado complicadas para ser introducidas directamente en la integral a  $y_2$ . Si utilizamos los valores para  $\gamma$  y  $\lambda$  obtenidos previamente podemos tomar aproximadamente

$$F(x_2, y_2) \approx 1.09 \times 10^{-4} (x_2 - y_2)$$

$$G(x_2, y_2) \approx 8.87 \times 10^{-4} (x_2 - y_2)$$

Podemos escribir entonces para  $B$

$$B \approx 2.28 \times 10^{-3} e^{-\gamma t - \lambda x_1} \int_a^b dy_2 e^{\epsilon 6.52 y_2} \left\{ (.8 / |x_2 - y_2|) - \frac{1 + e^{-.16 x_1 / |x_2 - y_2|}}{1 + 2.5 |x_2 - y_2|} + \sqrt{1 + \left( \frac{.16 x_1}{|x_2 - y_2|} \right)^2} - 1 \right\}$$

Llamaremos  $I_B$  a la integral que aparece como factor en la expresión anterior. Distinguiremos tres intervalos en esta integral:

$$I_{Ba}, a=0, b=x_2', \epsilon=1; I_{Bb}, a=x_2', b=x_2, \epsilon=0; I_{Bc}, a=x_2, b=1, \epsilon=-1.$$

Calculamos en primer lugar  $I_{Ba}$ .

$$I_{Ba} = \int_0^{x_2} dy_2 e^{6.52 y_2} \left\{ \frac{.8}{x_2 - y_2} - \frac{1 + e^{-.16 x_1 / (x_2 - y_2)}}{1 + 2.5 (x_2 - y_2)} + \frac{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + .025 x_1^2}}{(x_2 - y_2)^2} - 1 \right\}$$

Designaremos con el subíndice  $i$  las integrales correspondientes a los distintos sumandos que se obtienen a partir de  $I_{Ba}$  mediante el cambio de variable  $(x_2 - y_2) = u$ , y las aproximaciones

$$e^{-1/u} \approx 1 - e^{-0.47u}$$

$$\sqrt{a^2 + u^2} \approx a e^{-u/a} + u$$

Se obtiene

$$I_{Ba1} = 0.8e^{6.52x_2} \{ E_1(6.52(x_2 - x'_2)) - E_1(6.52x_2) \}$$

$$I_{Ba4} = (1/6.52) e^{6.52x_2} \{ \exp(-6.52(x_2 - x'_2)) - \exp(-6.52x_2) \}$$

$$I_{Ba3} = 0.16 x_1 e^{6.52x_2} \{ E_1((6.52 + (6.52/x_1))(x_2 - x'_2)) - E_1((6.52 + (6.52/x_1))x_2) \} + \\ + (e^{6.52x_2}/6.52) \{ \exp(-6.52(x_2 - x'_2)) - \exp(-6.52x_2) \}$$

y para calcular  $I_{Ba2}$  es necesario un nuevo cambio de variable

$$u = 0.16 x_1 v$$

$$I_{Ba2} = 10.8e^{6.52x_2} \{ E_1(2.6 + 6.52(x_2 - x'_2)) - E_1(2.6 + 6.52x_2) \} - \\ - 5.38e^{6.52x_2} e^{1.17/x_1} \{ E_1((2.6 + 1.17/x_1) + (6.52 + 2.94/x_1)(x_2 - x'_2)) - \\ - E_1((2.6 + 1.17/x_1) + (6.52 + 2.94/x_1)x_2) \}$$

$$I_{Ba} = I_{Ba1} + I_{Ba2} + I_{Ba3} + I_{Ba4}$$

El segundo intervalo de integración corresponde a

$$I_{Bb} = \int_{x'_2}^{x_2} dy_2 \left\{ \frac{.8}{(x_2 - y_2)} - \frac{1 + e^{-.16x_1/(x_2 - y_2)}}{1 + 2.5(x_2 - y_2)} + \frac{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + .025x_1^2}}{(x_2 - y_2)} - 1 \right\}$$

y utilizando el mismo cambio de variables y aproximaciones que en el caso anterior obtenemos:

$$I_{Bb} = 0.8(\ln(x_2 - x'_2) - \ln 0) + .16x_1 \{ E_1(0) - E_1((x_2 - x'_2)/.16x_1) - (5/x_1)(\ln(1 + 2.5(x_2 - x'_2))) + \\ + (e^{.47/.4x_1}/.4x_1) (E_1(.47/.4x_1) - E_1((.47/.4x_1) + (.47(x_2 - x'_2)/.16x_1))) \}$$

Las singularidades logarítmicas desaparecen considerando la teoría de partes finitas, quedando únicamente una combinación de funciones  $E_1$  y logaritmos.

Si se procede de igual forma se obtiene  $I_{Bc}$ :

$$\begin{aligned}
 I_{BC} &= \int_{x_2}^1 dy_2 e^{-6.52y_2} \left\{ \frac{0.8}{y_2 - x_2} - \frac{1 + e^{-.16x_1/(x_2 - y_2)}}{1 + 2.5(y_2 - x_2)} + \sqrt{1 + \frac{0.025x_1^2}{(y_2 - x_2)^2}} - 1 \right\} \approx \\
 &= e^{-6.52x_2} \{ 0.8(E_1(0) - E_1(6.52(1-x_2))) + .16x_1(E_1(0) - E_1((6.52+6.25/x_1)(1-x_2))) + \\
 &\quad + 10.8(E_1(2.6) - E_1(2.6+6.5(1-x_2))) - \\
 &\quad - 5.38e^{1.17/x_1}(E_1(2.6+1.17/x_1) - E_1((2.6+1.17/x_1)+(6.52+2.94/x_1)(1-x_2))) \}
 \end{aligned}$$

y sumando los resultados obtenidos para los tres intervalos de integración queda:

$$\begin{aligned}
 B &\approx 2.28 \times 10^{-3} e^{\gamma t - \lambda x_1} \times \\
 &\times \left[ e^{6.52x_2} \{ 0.8(E_1(6.52(x_2 - x_2')) - E_1(6.52x_2)) + \right. \\
 &\quad + 0.16x_1(E_1((6.52+6.52/x_1)(x_2 - x_2')) - E_1((6.52+6.52/x_1)x_2)) + \\
 &\quad + 10.8(E_1(2.6+6.52(x_2 - x_2')) - E_1(2.6+6.52x_2)) - \\
 &\quad - 5.38e^{1.17/x_1}(E_1((2.6+1.17/x_1)+(6.5+2.94/x_1)(x_2 - x_2')) - \\
 &\quad \quad \quad \left. - E_1((2.6+1.17/x_1)+(6.5+2.94/x_1)x_2)) \} + \\
 &\quad + e^{-6.52x_2} \{ 0.8E_1(6.52(1-x_2)) - 0.16x_1E_1((6.52+6.25/x_1)(1-x_2)) + \\
 &\quad + 10.8(E_1(2.6) - E_1(2.6+6.5(1-x_2))) - \\
 &\quad - 5.38(E_1(2.6+1.17/x_1) - E_1((2.6+1.17/x_1)+(6.52+2.94/x_1)(1-x_2))) \} + \\
 &\quad + 0.8 \ln(x_2 - x_2') - \\
 &\quad - 0.16x_1(E_1((x_2 - x_2')/.16x_1) + (5/x_1) \ln(1 - 2.5(x_2 - x_2'))) + \\
 &\quad \left. + 0.4e^{1.17/x_1}(E_1(1.17/x_1) - E_1((1.17/x_1)+(2.9/x_1)(x_2 - x_2'))) \right]
 \end{aligned}$$

# APENDICE 6

Como en el cálculo de las integrales que definen  $B$  hemos de hacer para  $K$  también algunos cambios de variable y aproximaciones numéricas. Utilizaremos las expresiones anteriormente calculadas para  $F(x_2, y_2)$  y  $G(x_2, y_2)$  así como los valores obtenidos para  $\lambda$  y  $\gamma$  y las expresiones para las integrales  $I^{01}$ .

Podemos escribir para :

$$K = \int_0^1 dy_2 (1/\sqrt{F(x_2, y_2)}) I^{01} e^{\epsilon 6.52 y_2} = \\ = \int_0^1 dy_2 2e^{-\gamma y_2} e^{\epsilon 6.52 y_2} \left( E_1(2\lambda x_1) \Delta + E_1\left(2\lambda + \frac{1}{2(x_2 - y_2)}\right) x_1 \Delta + e^{-\lambda x_1} \ln\left(\frac{1}{4\lambda(x_2 - y_2)} + 1\right) \right)$$

donde  $\epsilon = 1$  ,  $0 < y_2 \leq x_2'$   
 $= 0$  ,  $x_2' < y_2 \leq x_2$   
 $= -1$  ,  $x_2 < y_2 \leq 1$

$$\Delta = 2 \operatorname{sh}(\lambda x_1)$$

Si, como hemos hecho en el apéndice 5, designamos por  $I_{Ka1}, I_{Kb1}$ , etc los diferentes integrandos y regiones de integración, por ejemplo:

$$I_{Ka2} = \int_0^{x_2'} dy_2 e^{6.52 y_2} 2 E_1\left(2\lambda + \frac{1}{2(x_2 - y_2)}\right) x_1 \Delta$$

y utilizamos las aproximaciones utilizadas en apéndices anteriores, obtenemos:

$$I_{Ka1} = (1/6.52) (e^{6.52 x_2'} - 1) E_1(2\lambda x_1) \Delta$$

$$I_{Kb1} = (x_2 - x_2') E_1(2\lambda x_1) \Delta$$

$$I_{Kc1} = (1/6.52) (e^{-6.52 x_2} - e^{-6.52}) E_1(2\lambda x_1) \Delta$$

$$I_{Ka3} \approx 1.5\xi e^{mx_2} \{ \sqrt{\pi\xi/m} (\operatorname{erf}\sqrt{m(0.01+x_2)} - \operatorname{erf}\sqrt{m(0.01+(x_2-x'_2)})} \}$$

$$I_{Kb3} \approx (1/\lambda) e^{-\lambda x_1} \operatorname{erf}\sqrt{0.4(x_2-x'_2)}$$

$$I_{Kc3} \approx 0.75\xi e^{-mx_2} \sqrt{\pi/(0.1+m\xi)} \operatorname{erf}\sqrt{(0.1+m\xi)(0.01+4\lambda(l-x_2))}$$

$$I_{Ka2} \approx e^{mx_2} R_a$$

$$R_a = \{ (e^{-m(x_2-x'_2)} - e^{-mx_2}) (1/V) (e^{-mV(x_2-x'_2)} - e^{-mVx_2}) \} \{ (1/m) (1.2e^{-3.2\lambda x_1} + 0.5e^{-4\lambda x_1} (\gamma_e + \ln x_1)) \} \\ + e^{m\xi} 1.2e^{-3.2\lambda x_1} [ \{ E_1(m(\xi+x_2-x'_2)) - E_1(m(\xi+x_2)) \} e^{-2m\xi/x_1} \{ E_1(Vm(\xi+(x_2-x'_2))) - E_1(Vm(\xi+x_2)) \} ] \\ + .35e^{-(4\lambda+3)x_1} \{ \operatorname{erf}\sqrt{0.016+mx_2} - \operatorname{erf}\sqrt{0.016+m(x_2-x'_2)} \}$$

$$I_{Kb2} \approx e^{-2\lambda x_1} R_b$$

$$R_b = 1.2e^{-1.6\lambda x_1} \{ (x_2-x'_2) - \xi \ln(4\lambda(x_2-x'_2)+1) - 1.3x_1(e^{-.7(x_2-x'_2)/x_1} - 1) - \\ - e^{-.7\xi/x_1} (E_1(.7(\xi+(x_2-x'_2)/x_1)) - E_1(.7\xi/x_1)) \} - \\ -.5 [ (\gamma_e + \ln x_1 + \ln 2\lambda) (x_2-x'_2) - .5x_1(e^{-1.9(x_2-x'_2)/x_1} - 1) + \\ + .7\xi(\sqrt{10\pi} \operatorname{erf}\sqrt{.4\lambda(x_2-x'_2)} - \sqrt{\pi x_1/\xi} (4\lambda x_1 + 1.9) (\operatorname{erf}\sqrt{(.1+19\xi/x_1)(.01+4\lambda(x_2-x'_2))} - \\ - \operatorname{erf}\sqrt{.01(.1+19\xi/x_1)})) ]$$

$$I_{Kc2} \approx e^{-mx_2} R_c$$

$$R_c = \{ (1-e^{-m(l-x_2)}) + (1/V) (1-e^{-mV(l-x_2)}) \} \{ (1/m) (1.2e^{-3.2\lambda x_1} + .5e^{-4\lambda x_1} (\gamma_e + \ln x_1)) \} + \\ + e^{m\xi} 1.2e^{-3.2\lambda x_1} \{ E_1(m\xi) - E_1(m(\xi-(l-x_2))) - e^{-2m\xi/x_1} (E_1(V\xi m) - E_1(Vm(\xi+(l-x_2)))) \} + \\ + .35e^{-(4\lambda+3)x_1} \operatorname{erf}\sqrt{0.016+m(l-x_2)}$$

Para poder reducir las fórmulas anteriores a un tamaño manejable hemos introducido la siguiente notación:

$$\xi = (1/4\lambda), \quad m = 6.52, \quad V = (x_1 + .2)/x_1, \quad \gamma_e = \text{constante de Euler} = .577$$

Reuniendo todos estos resultados y eliminando los términos cuya contribución (estimada mediante cálculo numérico) es despreciable, podemos

escribir para  $K$

$$\begin{aligned}
 K \approx 2e^{-\gamma\tau} \left\{ \Omega(e^{mx'_2} - 1)/m + \Omega(x_2 - x'_2) + \right. \\
 + e^{-\lambda x_1} \{ (.19/\lambda) e^{mx_2} e^{.01/\lambda} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{.2(x_2 - x'_2)/\lambda}) + (1/\lambda) \operatorname{erf} \sqrt{.4\lambda(x_2 - x'_2)} + \\
 + \Delta \{ (1/m) e^{-36\lambda x_1} (1.21 \ln(e^{\gamma e x_1}) (e^{-m(x_2 - x'_2)} - (1/v) e^{-vm(x_2 - x'_2)}) e^{mx_2} + \\
 + 1.2 e^{16/\lambda} e^{-36\lambda x_1} (E_1(m(\xi + (x_2 - x'_2))) - e^{-3/\lambda x_1} E_1(mv(\xi + (x_2 - x'_2))) e^{mx_2} + \\
 + .3 e^{-(4\lambda+3)x_1} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{m(x_2 - x'_2)}) e^{mx_2} + \\
 + 1.2 e^{-3.6\lambda x_1} ((x_2 - x'_2) - \ln(4\lambda(x_2 - x'_2) + 1)) + 1.33 x_1 (1 - e^{-.7(x_2 - x'_2)/x_1}) - \\
 - 1.2 e^{-3.6\lambda x_1} (\xi e^{.2/\lambda x_1} (E_1((.7/x_1)(\xi + (x_2 - x'_2))) - E_1(.2/\lambda x_1)) - \\
 - .35 e^{-2\lambda x_1} (\ln(2\lambda e^{\gamma e x_1}) ((x_2 - x'_2) + .5 x_1 (1 - e^{-(1.9/x_1)(x_2 - x'_2)}))) - \\
 - .35 e^{-2\lambda x_1} (.2/\lambda) (5 \operatorname{erf} \sqrt{.4\lambda(x_2 - x'_2)} - \sqrt{x_1 \pi / \xi (4\lambda x_1 + 1.9)} (\operatorname{erf} \sqrt{((.4\lambda x_1 + 1.9)/x_1)(x_2 - x'_2)} - \\
 \left. - \operatorname{erf} \sqrt{\xi (4\lambda x_1 + 1.9) / 100 x_1}) \right\}
 \end{aligned}$$

Para la utilización de  $K$  en los correspondientes cálculos se ha determinado numéricamente su comportamiento en función de  $x_1, (x_2 - x'_2)$  y  $x'_2$ , obteniéndose como aproximación:

$$K \approx 2e^{-\gamma\tau} \{ ((x_2 - x'_2) + 1.07)^{8.75} e^{-6.15(x_2 - x'_2)} e^{-.158 x_1} \}$$

MAIN PROGRAM

STORAGE USED: CCE3(1) CCE120; DATA(1) 004143; BLANK COMPON(2) 070200

EXTERNAL REFERENCES (ELCCK, NAME)

CCE3 N1ATPS  
CCE4 ALDLS  
CCE5 N1025  
CCE6 XPRR  
CCE7 EXP  
CCE10 AL00  
CCE11 N1015  
CCE12 N1015  
CCE13 SLRT  
CCE14 NSTCP5

STORAGE ASSIGNMENT (ELCCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

CCE1	CCE157	126L	CCE1	CCE161	128L	LCCL	CCE137	130G	CCE1	CCE105	130L	CCE1	CL0708	135L
CCE1	CCE158	140G	CCE1	CL0672	147G	LCCL	CCE117	150L	CCE1	CCE105	156G	CCE1	CL0123	166G
CCE1	CCE142	177G	CCE1	CL0147	194G	LCCL	CCE114	200G	CCE1	CCE105	201G	CCE1	CL0425	201G
CCE1	CCE127	2013F	CCE1	CCE133	2004F	LCCL	CCE136	2013F	CCE1	CCE105	201G	CCE1	CL0456	274G
CCE1	CCE157	272G	CCE1	CL0156	3000L	LCCL	CCE112	304G	CCE1	CCE105	311G	CCE1	CL0570	324G
CCE1	CCE175	320L	CCE1	CCE177	330L	LCCL	CCE121	350L	CCE1	CCE173	36L	CCE1	CL0736	364G
CCE1	CCE155	330G	CCE1	CL0150	402G	LCCL	CL0114	404G	CCE1	CL0104	425G	CCE1	CL0106	432G
CCE1	CL0162	434G	CCE1	CL0125	449G	LCCL	CL0113	451G	CCE1	CL0114	461G	CCE1	CL0416	47L
CCE1	CL0153	470G	CCE1	CCE172	54L	LCCL	CCE170	56L	CCE1	CCE175	A	CCE1	CL0704	AL1
CCE1	CCE170	A1AT	CCE1	CCE172	A1ATG	LCCL	CCE172	A1ATG	CCE1	CCE175	A1AT2	CCE1	CL0770	AJ2
CCE1	CCE173	AM	CCE1	CCE174	AM2	LCCL	CCE177	A1EAM	CCE1	CCE175	AM	CCE1	CL0710	AMP
CCE1	CCE170	AP1	CCE1	CCE171	AM11	LCCL	CCE170	AM	CCE1	CCE176	AM	CCE1	CL0720	A1
CCE1	CCE172	A12	CCE1	CCE172	A3	LCCL	CCE172	AM	CCE1	CCE176	AM	CCE1	CL0720	A1
CCE1	CCE175	GA	CCE1	CCE177	GAMMA	LCCL	CCE172	M1	CCE1	CCE172	M2	CCE1	CL0736	H3
CCE1	CCE170	H21	CCE1	CCE173	H32	LCCL	CCE173	M32	CCE1	CCE173	M321	CCE1	CL0733	H312
CCE1	CCE174	H333	CCE1	CCE174	H4	LCCL	CCE174	M41	CCE1	CCE174	M42	CCE1	CL0745	I
CCE1	CCE170	IA	CCE1	CCE170	IA	LCCL	CCE170	IC	CCE1	CCE170	II	CCE1	CL0747	J
CCE1	CCE173	JJ	CCE1	CCE173	JJJ	LCCL	CCE173	J1	CCE1	CCE173	J11	CCE1	CL0767	J2
CCE1	CCE174	K	CCE1	CCE177	KC	LCCL	CCE177	KX	CCE1	CCE177	KX	CCE1	CL0744	KY
CCE1	CCE177	KC	CCE1	CCE177	K1	LCCL	CCE177	K2	CCE1	CCE177	K8	CCE1	CL0715	L
CCE1	CCE176	LAPDA	CCE1	CCE171	LL	LCCL	CCE171	L1	CCE1	CCE176	L2	CCE1	CL0707	PM
CCE1	CCE170	M1	CCE1	CCE171	M11	LCCL	CCE171	M2	CCE1	CCE171	M3	CCE1	CL0705	N
CCE1	CCE170	NA	CCE1	CCE170	NH	LCCL	CCE170	N2	CCE1	CCE170	N1	CCE1	CL0701	N2
CCE1	CCE172	N3	CCE1	CCE175	PANEN1	LCCL	CCE176	PANEN2	CCE1	CCE176	PANEN4	CCE1	CL0700	P1
CCE1	CCE176	P2	CCE1	CCE174	P3	LCCL	CCE174	P4	CCE1	CCE175	N081	CCE1	CL0705	I
CCE1	CCE170	TAB	CCE1	CCE152	XP2	LCCL	CCE152	X2	CCE1	CCE175	Y1	CCE1	CL0710	Y2
CCE1	CCE172	Y3												

CCE171 1\* DIMENSION 6X1127)  
CCE172 2\* DIMENSION 1115)  
CCE173 3\* DIMENSION 6X1153),TAR(63)  
CCE174 4\* DIMENSION 1111),500)  
CCE175 5\* DIMENSION 2111),900)  
CCE176 6\* DIMENSION 2111),900)  
CCE177 7\* DIMENSION 2111),900)  
CCE178 8\* DIMENSION 2111),900)  
CCE179 9\* DIMENSION 2111),900)  
CCE180 10\* DIMENSION 2111),900)

CC0000  
CC0001  
CC0002  
CC0003  
CC0004  
CC0005  
CC0006  
CC0007  
CC0008  
CC0009  
CC0010

APENDICE 7

P.02 A-21



CALCULO DE LA CORRELACION VARIABLES Y--Y--DELTA)

DATE 031180

PAGE 2

CC112	90	COMMON P1,P2	CC0001
CC113	100	REAL LAMDA	CC0001
CC114	110	GAUSS=C,15	CC0001
CC115	120	LAPDAP=1,5	CC0003
CC116	130	WRITE(6,20001)	CC0005
CC117	140	WRITE(6,2001) GAMMA,LAMDA	CC0012
CC118	150	IA=0	CC0021
CC119	160	IR=0	CC0022
CC120	170	IC=1	CC0031
CC121	180	CO 4 I1=1,20	CC0037
CC122	190	A1=I1-1	CC0037
CC123	200	FX(I1)=A11	CC0044
CC124	210	CONTINUE	CC0047
CC125	220	XP(I1)=0.008	CC0047
CC126	230	CO 5 M1=2,19	CC0054
CC127	240	A1=M1-1	CC0054
CC128	250	XP(I1)=AM1/20.0-0.001	CC0061
CC129	260	CONTINUE	CC0072
CC130	270	CALL DAMCS VALORES A X1 Y A (X2=Y2).	CC0072
CC131	280	CO 12 PM=1,10	CC0072
CC132	290	PM=PM	CC0072
CC133	300	EM(M)=AMM/100.0	CC0075
CC134	310	CONTINUE	CC0105
CC135	320	CO 20 P11=11.59	CC0105
CC136	330	JM11=M11	CC0105
CC137	340	EM(M11)=(AM11/10.0)-0.9	CC0110
CC138	350	CONTINUE	CC0116
CC139	360	P1=5	CC0116
CC140	370	CO 30 P2=60.63	CC0123
CC141	380	P3=M1+1	CC0123
CC142	390	EM(M3)=M3	CC0125
CC143	400	CONTINUE	CC0131
CC144	410	IF (IA.GE.1) GO TO 36	CC0131
CC145	420	CO 30 L=1,19	CC0142
CC146	430	Y2=Y1	CC0142
CC147	440	ALCA=5.66	CC0144
CC148	450	A1=ALCA*XP2(L)	CC0147
CC149	460	CO 30 L1=1,900	CC0156
CC150	470	Y2=Y1-C,01	CC0156
CC151	480	Y3=ALCA*Y2	CC0161
CC152	490	IF (Y2-A1) 310,3000,320	CC0163
CC153	500	A12=Y3/Y3-A1+2.C1	CC0166
CC154	510	CO TC 330	CC0173
CC155	520	A1=Y2	CC0175
CC156	530	A3=AFS(Y3-A1)	CC0177
CC157	540	AM=AFS(Y2-XP2(L))	CC0202
CC158	550	F1=(1-EXP(-1.241*A3))/(A3+0.25))-(EXP(-1.241*A12))/(A12+0.25))	CC0206
CC159	560	F2=M1*EXP(1.5*A1)	CC0201
CC160	570	F3=EXP(-0.5*A1)	CC0201
CC161	580	F32=EXP(-0.75*A3)	CC0206
CC162	590	IF (A1-70.0) 1900,1990,1990	CC0206
CC163	600	CONTINUE	CC0206
CC164	610	IF (AM-70.0) 1910,1990,1990	CC0206
CC165	620	CONTINUE	CC0206
CC166	630	F321=EXP(1.241*A1)	CC0206
CC167	640	F322=1.0+0.0	CC0206
CC168	650	F323=Y2+0.0	CC0206
CC169	660	F324=F31/M32-0.25/M33	CC0206
CC170	670	F325=M32/M33	CC0206
CC171	680	AM=(A4+1.07)*0.75*EXP(-A3)	CC0206
CC172	690	F4=1.74*ALCA*F2+0.25*M3	CC0206

[illegible][illegible]

100

11-23

```

CG42C 135. WRITE(6,20C2) (P1(K,X8),X8=2,9C0,2)
CG42E 136. 28C CONTINUE
CG43C 137. WRITE(117,20C5) (F1(KX,KC),KC=1,9C0),KX=1,1C1
CG441 138. WRITE(6,20C0)
CG441 139. 5 VAPOR A MULTIPLICAR
CG443 140. NW=0
CG444 141. LL=7
CG445 142. NW=NB+1
CG446 143. CO 7C3 KW=1,13
CG451 144. KW=15, C=AP2(LL)*100.0
CG452 145. CO 4C3 L2=1,9C3
CG455 146. AINTX2(L2)=C.0
CG456 147. 4C0 CONTINUE
CG460 148. CO 5C0 N=1,NA
CG463 149. A=N
CG464 150. Z2=XF2(LL)*.C01*AW/1C0.0
CG465 151. A1=X2*.C1)*10C.C
CG466 152. A2=9C3-N1
CG467 153. CO 4C3 N3=1,A1
CG472 154. P4(N3)=P1(KX,N3)+P2(LL,N2+N3)
CG473 155. AINTX2(N1)=AINTX2(N3)+P4(N3)*.C1
CG474 156. 45C CONTINUE
CG476 157. APTX2(N3)=AINTX2(N3)-(P4(N3)+P4(N1))*10C0
CG477 158. 50C CONTINUE
CG501 159. WRITE(6,20C0)
CG503 160. WRITE(6,20C2) (AINTX2(N2),N2=2,9C0,2)
CG506 161. 70C CONTINUE
CG510 162. WRITE(6,20C0)
CG512 163. 90C CONTINUE
CG513 164. 149C WRITE(6,20C3) A1,A4
CG517 165. 20C0 FORMAT(1+1)
CG520 166. 2C01 FORMAT(1CX,"GAPMA="*,F6.3,10X,"LANDA="*,F6.3,///)
CG521 167. 2C02 FORMAT(2X,10C13.6)
CG522 168. 2C03 FORMAT(1CX,E13.6,10X,E13.6)
CG523 169. 2C04 FORMAT(2X,715X,E13.6))
CG524 170. 2C05 FORMAT(E13.6)
CG525 171. 30C0 CONTINUE
CG526 172. ENC

```

601257

END OF COMPILATION: NO DIAGNOSTICS.

MAP 2961 SL7JR1 C3/11/80 17:23:10

04C0C0 143126 124A3 DRANK MOND'S DECIMAL

STARTING ADDRESS 516116

SEGMENT SPAIN

011915

04000 140326

NSWILS/FCR-E9	9111	001025	061029		
NRBLKS/FCR-E2	9111	001025	061047		
NINTWS/FCR-E3	9111	001050	061122	9121	C40060 C40061
EXPI/FCR59	9111	001123	061212	9121	C43516 C40036
NVEFS/FCR-E2	9111	001213	061200	9121	C40027 C40036
NRWNCDS/FCR-E3	9111	001213	061504	9121	C40037 C40037

CS AMB YJ 320670C1

29 APR 74 13:48:27

23 JUN 75 16:45:34

12 MAY 71 19:49:18

24 APR 74 11:48:58

23 JUN 75 14:07:02

4 AP 3 4

SFOR, IS A, P

FOR CCEJ-CJ/14/80-18:43:19 (13)

MAIN PROGRAM

STORAGE USED: CCEJ11) CCEJ1C) DATA1C) 125704; BLANK COMMON12) CCEJCC

EXTERNAL REFERENCES (ELTECH, NAME)

CCEJ3 AINTRX  
CCEJ4 ARELS  
CCEJ5 AIC25  
CCEJ6 AIC25  
CCEJ7 AIC15  
CCEJ10 ARELS  
CCEJ11 ARELS  
CCEJ12 ASTCP5

STORAGE ASSIGNMENT (ELTECH, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

CCEJ1	CCEJ16	1235	CCEJ1	CCEJ045	1376	CCEJ1	CCEJ067	1476	LCU1	CCEJ07C	1516	CCEJ1	CCEJ102	1576
CCEJ1	CCEJ1C	1526	CCEJ1	CCEJ32	1720L	CCEJ1	CCEJ34	171EL	LCU1	1C5535	20C1F	CCEJ1	1C5537	20C1F
CCEJ1	1C5546	20C2F	CCEJ1	1C5546	20C9F	LCU1	1C5574	20C9F	LCU1	1C5574	2010F	CCEJ1	1C5574	2011F
CCEJ1	1C5585	2012F	CCEJ1	1C562C	2713F	LCU1	1C5622	2014F	LCU1	1C5636	2015F	CCEJ1	CCEJ162	211G
CCEJ1	CCEJ206	216G	CCEJ1	CCEJ253	224G	CCEJ1	CCEJ26C	232G	CCEJ1	CCEJ32C	241G	CCEJ1	CCEJ362	261G
CCEJ1	CCEJ435	276G	CCEJ1	CCEJ465	311G	CCEJ1	CCEJ467	311G	CCEJ1	CCEJ503	321G	CCEJ1	CCEJ505	324G
CCEJ1	CCEJ491	340G	CCEJ1	CCEJ546	343G	CCEJ1	CCEJ574	351G	CCEJ1	CCEJ621	371G	CCEJ1	CCEJ637	41G
CCEJ1	CCEJ635	401G	CCEJ1	CCEJ654	411G	CCEJ1	CCEJ657	416G	CCEJ1	CCEJ711	431G	CCEJ1	CCEJ736	444G
CCEJ1	CCEJ766	462G	CCEJ1	CCEJ767	464G	CCEJ1	CCEJ346	501L	LCU1	CCEJ034	6L	CCEJ1	CCEJ52C	A
CCEJ1	1C5443	A11	CCEJ1	CCEJ1116	A1ATX2	LCU1	1C5551C	A1V	LCU1	1C546C	ALL	CCEJ1	CCEJ52C	AMAX
CCEJ1	1C5445	AM1	CCEJ1	1C5445	AN	CCEJ1	1C5554	ANNA	LCU1	1C555C1	H	CCEJ1	1C5527	BJV
CCEJ1	CCEJCC	DX1	CCEJ1	1C5441	DEL	LCU1	1C5476	F	LCU1	CCEJ222	GYC	CCEJ1	CCEJ076	GYON
CCEJ1	CCEJ016	G2XXZ	CCEJ1	1C545C	IA	CCEJ1	1C5522	IAC	CCEJ1	1C5451	IB	CCEJ1	1C5523	IBD
CCEJ1	1C5517	ID	CCEJ1	1C5532	IOA	CCEJ1	1C5531	IOC	LCU1	1C5516	IOPAR	CCEJ1	1C5515	IOFIN
CCEJ1	1C5442	II	CCEJ1	1C5452	IV	CCEJ1	1C5511	IY	LCU1	1C5514	IYY	CCEJ1	1C5452	JA
CCEJ1	1C5454	JR	CCEJ1	1C5512	JL	CCEJ1	1C5526	JV	LCU1	1C5524	JW	CCEJ1	1C5525	JZ
CCEJ1	1C5455	KK	CCEJ1	1C552C	LA	LCU1	1C5523	LB	LCU1	1C5457	LL	CCEJ1	1C5461	LLL
CCEJ1	1C5517	LV	CCEJ1	1C5536	LW	CCEJ1	1C551C	LX	LCU1	1C5463	LZ	CCEJ1	1C5462	L5
CCEJ1	1C5446	MA	CCEJ1	1C5447	MR	CCEJ1	1C5471	MV	LCU1	1C5514	PX	CCEJ1	1C5533	MZ
CCEJ1	1C5444	M1	CCEJ1	1C5464	N	LCU1	1C5462	NN	LCU1	1C55C1	NNA	CCEJ1	1C5472	NNA
CCEJ1	1C5474	NNW	CCEJ1	1C5535	NW	LCU1	1C5467	NI	LCU1	1C547C	NZ	CCEJ1	1C5471	N3
CCEJ1	CCEJ772	OX	CCEJ1	1C5611	P	CCEJ1	CCEJ4571	P1	LCU1	CCEJ1451	P2	CCEJ1	1C5131	PN
CCEJ1	1C5475	W	CCEJ1	1C5477	WA	LCU1	CCEJ1426	XP1	LCU1	1C5456	X1	CCEJ1	1C546C	X2
CCEJ1	1C5513	Y												

CCEJ11 14 DIMENSION PX(147)  
CCEJ13 14 DIMENSION AMAX(22)  
CCEJ14 14 DIMENSION GYON(22,9C)  
CCEJ15 44 DIMENSION DX(2C)  
CCEJ16 54 DIMENSION G2XXZ(144,94)  
CCEJ17 64 DIMENSION GYON(22,9C)  
CCEJ18 74 DIMENSION A1ATX2(2C)  
CCEJ19 84 DIMENSION XP(137)  
CCEJ20 94 DIMENSION P2(2C,52C)  
CCEJ21 104 DIMENSION P1(2C,142)  
CCEJ22 114 DIMENSION P1(2C)  
CCEJ23 124 DIMENSION PN(2C)  
CCEJ24 134 DIMENSION P1(2C)

CCEJ00C

CCEJ001

CCEJ001

CCEJ001

CCEJ001

CCEJ001

CCEJ001

CCEJ001

CCEJ001

CCEJ001

CCEJ001

CCEJ001

A-25



```

CC275 77* CO 600 NNA=1,LS
CC300 78* MNA=MNA
CC301 79* M2=AMV/1700
CC302 80* G2XX2(LLL,NNA)=B*(110/(110-A*X2))-1)
CC303 81* CONTINUE
CC305 82* 1000 CONTINUE
CC305 83* C INTERPOLACION DE XP2
CC307 84* CO 1400 NM=1,90
CC312 85* CO 600 LW=2,5
CC315 86* G2XX2(LV,NM)=G2XX2(1,NM)*LW*(G2XX2(15,NM)-G2XX2(1,NM))/5.0
CC316 87* 800 CONTINUE
CC320 88* CO 950 LV=5,90,5
CC321 89* CO 940 LX=1,5
CC326 90* G2XX2(LV,LX,NM)=G2XX2(LV,NM)*LX*(G2XX2(15,NM)-G2XX2(LV,NM))/5.0
CC327 91* 540 CONTINUE
CC331 92* 550 CONTINUE
CC333 93* 1400 CONTINUE
CC333 94* C PASO A COORDENADAS Y--DELTA
CC335 95* WRITE(6,2000)
CC337 96* CO 1400 IY=1,22
CC342 97* CO 1400 JL=1,90
CC345 98* GY(IY,JL)=0.0
CC346 99* 1400 CONTINUE
CC350 100* IY=J2+IY
CC351 101* IY=2+IY
CC352 102* IDJN=45-IY
CC353 103* IDJN=45-IY
CC354 104* CO 1550 IDJN=IDJN,10MAX
CC357 105* LA=IY-IDJN
CC360 106* LB=IY-IDJN
CC361 107* GY(IY,IDJN)=G2XX2(LA,LB)
CC362 108* 1550 CONTINUE
CC364 109* IF (PK.GT.1) GO TO 1730
CC366 110* AMAX(IY)=GY(IY,1)
CC367 111* CO 1700 IAC=2,90
CC372 112* A=AMAX(IY)
CC373 113* B=GY(IY,IAC)
CC374 114* IF (A-B) 1710,1710,1720
CC377 115* 1710 AMAX(IY)=B
CC400 116* 1720 CONTINUE
CC402 117* 1730 CO 1740 IBD=1,90
CC405 118* GY(IY,IBD)=GY(IY,IBD)/AMAX(IY)
CC406 119* 1740 CONTINUE
CC410 120* 1400 CONTINUE
CC412 121* CO 1450 J2=1,21,2
CC415 122* CO 1450 J2=1,2
CC420 123* J2=J2-1
CC421 124* J2=J2-1
CC422 125* J2=J2-1
CC423 126* J2=J2-1
CC427 127* WRITE(6,2009) X1,AJV
CC435 128* WRITE(6,2009) (GY(IJV,IDD),IDD=1,90)
CC442 129* WRITE(6,2012) X1,AJV,AMAX(JV)
CC450 130* WRITE(6,2013) (GY(IJV,IDA),IDA=1,90)
CC452 131* 1650 CONTINUE
CC454 132* WRITE(6,2000)
CC456 133* 1660 CONTINUE
CC460 134* WRITE(13,2015) ((GY(IJ2,MX),MX=1,90),M2=1,22)
CC471 135* 1800 CONTINUE
CC473 136* 2000 FORMAT(1H1,13CX)
CC474 137* 2001 FORMAT(1Z1/,13CX,4X,1Z2/**),4X,2(/,13CX)
CC475 138* 2002 FORMAT(1CX,'LL=',1Z,1CX,'XP2=',F5.3,1CX,'LLL=',1Z,1CX,'ALL=',F6.3,
CC475 139* 2003 /,13CX)

```

CC0427

CC0435

CC0440

CC0443

CC0467

CC0467

CC0467

CC0467

CC0467

CC0467

CC0505

CC0505

CC0505

CC0505

CC0526

CC0526

CC0526

CC0526

CC0541

CC0546

CC0546

CC0547

CC0547

CC0561

CC0566

CC0574

CC0574

CC0600

CC0604

CC0612

CC0612

CC0614

CC0621

CC0621

CC0622

CC0624

CC0627

CC0635

CC0635

CC0635

CC0635

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

CC0637

2014

A-27



SECRET, S A, A  
FOR CUE3-12/10/75-17:35:23 (C)

## MAIN PROGRAM

STORAGE USED: C(01112);-DATA(0)-DC421C;-LANE-CHMD4121-041314-

## LITERATURE REFERENCES (BLOCK, NAME)

C003	REQUIRE
C004	ADD
C005	DELETE
C006	REUSE
C007	RELEASE
C010	RELEASE
C011	APPR
C012	EXP
C013	ALUG
C014	SRT
C015	NSIOPS

STORAGE ASSIGNMENT	BLOCK 1- TYPE	RELATIVE LOCATOR, NAME1
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9
10	10	10
11	11	11
12	12	12
13	13	13
14	14	14
15	15	15
16	16	16
17	17	17
18	18	18
19	19	19
20	20	20
21	21	21
22	22	22
23	23	23
24	24	24
25	25	25
26	26	26
27	27	27
28	28	28
29	29	29
30	30	30
31	31	31
32	32	32
33	33	33
34	34	34
35	35	35
36	36	36
37	37	37
38	38	38
39	39	39
40	40	40
41	41	41
42	42	42
43	43	43
44	44	44
45	45	45
46	46	46
47	47	47
48	48	48
49	49	49
50	50	50
51	51	51
52	52	52
53	53	53
54	54	54
55	55	55
56	56	56
57	57	57
58	58	58
59	59	59
60	60	60
61	61	61
62	62	62
63	63	63
64	64	64
65	65	65
66	66	66
67	67	67
68	68	68
69	69	69
70	70	70
71	71	71
72	72	72
73	73	73
74	74	74
75	75	75
76	76	76
77	77	77
78	78	78
79	79	79
80	80	80
81	81	81
82	82	82
83	83	83
84	84	84
85	85	85
86	86	86
87	87	87
88	88	88
89	89	89
90	90	90
91	91	91
92	92	92
93	93	93
94	94	94
95	95	95
96	96	96
97	97	97
98	98	98
99	99	99
100	100	100

[illegible][illegible]



00114	119	GAPPA:CA15	00001
00115	120	LAPCA:15	00003
00116	130	WRITE(16,2,00)	00005
00117	140	WRITE(16,2001) GAPPA-LAPGA	00012
00120	150		00012
00124	160	1A=1	00021
00125	170	10=0	00021
00126	180	FEAC(10,2002) P4	00023
00127	190	DC 1 120=1.9	00024
00131	190	DC 1 120=1.9	00037
00134	200	FEAC(10,2002) P2(120,110),110=1,9001	00037
00142	210	FEAC(10,2002) P4	00047
00145	220	CONTINUE	00066
00147	230	DC 4 110=1.20	00066
00152	240	ALL=11-1	00066
00153	250	WRITE(12,11/2,0	00071
00158	260	A CONTINUE	00103
00159	270		00103
00158	280	DC 5 110=1.9	00103
00161	290	AM=1	00103
00162	300	XP2(11)=AM/10.0-0.01	00103
00163	310	CONTINUE	00117
00163	320		00117
00163	330		00117
00163	340		00117
00163	350		00117
00163	360	ALL (AMOS VALGRES A XI Y A (X2-Y2).	00117
00170	370	DC 15 PH=1.10	00117
00171	380	AP=4	00117
00171	390	RMVPR=MMV/100.0	00117
00172	400	1E CONTINUE	00132
00172	410		00132
00174	410	DC 10 110=1.59	00132
00177	420	AP=11=11	00132
00200	430	UMPI(1)=AM/10.01-0.5	00132
00201	440	CONTINUE	00143
00201	450		00143
00203	460	M3=1	00143
00204	470	UD 10 P2=60.63	00150
00207	480	M3=3.1	00150
00210	490	BM(2)=M3	00150
00211	500	3C CONTINUE	00156
00211	510		00156
00211	520		00156
00211	530		00156
00211	540		00156
00211	550		00156
00211	560		00156
00211	570		00156
00211	580		00156
00211	590		00156
00211	600		00156
00215	610	IF 117-0.11 UD 10 36	00156
00220	620	DC 100 15=1.9	00167
00221	630	Y2=5.11	00167
00221	640	ALGM=5.66	00171
00221	650	ALCANA=P2(11)	00171
00221	660	DC 15 11=1.700	00203
00221	670	Y2=2-0.01	00203
00230	680	Y3=ALCANA*Y2	00203
00233	690	IF 117-11 310,300,320	00210
00234	700	11C AND 150Y3-AL02-01	00210
00234	710	GO TO 310	00220
00235	710	22C 15=1	00224
00236	720	23C 15=AB(173-11)	00224

212

A-307





## BIBLIOGRAFIA

- (1) Reynolds, O. - "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion". Scientific Papers Vol II. (1895)
- (2) Taylor, G. I. - "Statistical Theory of Turbulence". Proc. Roy. Soc. London A151 (1931)
- (3) Ladyshenskaya, D. A. - "Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows". Gordon & Breach (1969)
- (4) Kolmogorov, Dokl. Akad. Wiss. USSR 30 (1941) 301 e idem 32 (1941) 16. Traducidos en Goering, H. "Sammelband zur Statistische Theorie der Turbulence". Berlin 1958.
- (5) Launder, Reece & Rodi. J. Fluid Mech. 68 (1975) 573.
- (6) Kraichnan, R. H. - Phys. Rev. 109 (1958) 1047
- (7) " - J. Fluid Mech. 5 (1959) 497
- (8) " - Phys. Fluids 7 (1964a) 1048
- (9) " - Phys. Fluids 7 (1964b) 1169
- (10) " - Phys. Fluids 7 (1964) 1723
- (11) " - Phys. Fluids 8 (1965) 575
- (12) " - Phys. Fluids 9 (1966) 1728
- (13) " - Phys. Fluids 11 (1968) 265
- (14) " - J. Fluid Mech. 41 (1970) 189
- (15) " - J. Fluid Mech. 47 (1971) 525
- (16) Grant, Stewart & Moilliet - J. Fluid Mech. 12 (1962) 241
- (17) Leslie, D. C. - "Developments in the theory of turbulence". Clarendon Press (1973)
- (18) Orszag, S. A. - Phys. Fluids Suppl II 12 (1969) 250

- (19) Orszag&Patterson-"Statistical models & turbulence",Proceedings of a Symposium held at U.C.(La Jolla).Springer Vg.(1972)
- (20) Schumann&Herring-J Fluid Mech. 76 (1976)755
- (21) Rotta.-Z. fuer Physik 129 (1951) 547 e idem 573
- (22) Leslie,D.C.-"Some suggestion for the proposed DI calculation" TU. 7/75.(Report interno)
- (23) Leslie,D.C.-"Review of developments in turbulence theory".Rep. Prog.Phys.36 (1973) 1365
- (24) Martin,Siggia&Rose-Phys.Rev. A8 (1973)423
- (25) Wyld-Annals of Physics 14 (1961)143
- (26) Edwards&McComb-J.of Physics A2 (1969)157
- (27) Horner&Lipowsky-Z.Physik B33 (1979)157
- (28) Prandtl-AVA Goettingen IV (1932)18
- (29) Bourke,Drain&Moss-DISA Information n°12.Nov.1971
- (30) Laufer-NACA TR 1174 (1954)
- (31) Comte-Bellot,G-"Ecoulement turbulent entre deux parois paralleles".(1965).Publications Scientifiques et Techniques du Ministere de l' air".N°419
- (32) Hanjalic&Launder.-J.Fluids Mech. 51 (1972)301
- (33) Sabot,J-"Etude de la coherence spatiale et temporelle de la turbulence en conduite".These.Université de Lyon.(1976)
- (34) Tennekes&Lumley-"A first course in turbulence".The MIT Press (1972) pp146 y siguientes.
- (35) Comte-Bellot&Sabot-J.Fluid Mech.74 (1976)767
- (36) Nakagawa&Nezu-J.Fluids Mech.80 (1977)99
- (37) Rotta.-"Turbulenter Stroemungen".Teubner Vg.1972

- (38) Brandshaw- Imperial College Aero.Rep. n° 73-05 (1973b)
- (39) Oberhettinger-"Tabellen zur Fourier transformation".Springer Vg  
1957
- (40) Hadamard-"Lectures on cauchy's problem".Dover Publ.1952
- (41) Davison-"Neutron transport theory".Clarendon Press.1957
- (42) Karplus-"Analog simulation solution of fields problems".McGraw-  
Hill.1958
- (43) Courant-Hilbert.-"Methods of Mathematical Physics".Vol II.  
Interscience.Capítulo 3.
- (44) Gradshteyn&Ryzhik-"Table of integrals,series & products".Acade-  
mic Press.1965

